Facultad
de
Ciencias

Representación de Ge'lfand de un álgebra de Banach conmutativa con unidad

(Gel'fand representation of a commutative Banach algebra with unity)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Álvaro Pérez Romero

Director: Jesús Araujo Gómez

Marzo - 2021

Agradecimientos

Este trabajo para acceder al Grado de Matemáticas le ha supuesto a este alumno un esfuerzo notable. Nunca podría haberlo realizado sin la buena formación recibida en esta Facultad. Por lo tanto, mi primer agradecimiento debe dirigirse a esta institución docente y a su profesorado.

La formación universitaria es una formación académica. Pero también una educación en valores humanos. A los amigos de esta Facultad con los que compartí momentos de alegría y de los que recibí su aliento en momentos de decaimiento dirijo también, por tanto, mi afecto y recuerdo.

Doy por supuesto que mi familia, mi último soporte y poco dada a exteriorizar las emociones, conoce mi íntimo sentimiento hacia ella.

Dejo para el final mi reconocimiento, aprecio y gratitud a mi profesor tutor en este trabajo, al Prof. Dr. Jesús Araujo Gómez. Su cercanía, disposición constante, sin reparar en fechas o momentos, y su sabia orientación me han posibilitado enfrentar este Trabajo Final de Grado, así creo, con satisfacción. Jesús es para mí más que un profesor, es ese afectuoso maestro que ya tiene preferente lugar en mi memoria agradecida.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es enunciar y demostrar el teorema de representación de Gel'fand para el caso particular de las álgebras de Banach conmutativas con unidad. Para ello, se necesita estudiar previamente el concepto de topología débil-* en un espacio dual; la definición de álgebra y algunos de sus ejemplos, como es el espacio de funciones continuas sobre un conjunto compacto; las propiedades de invertibilidad, resolvente y espectro en álgebras de Banach con unidad; los conceptos de espacio de caracteres y de espacio de ideales maximales de un álgebra de Gel'fand.

Palabras clave: representación de Gel'fand, álgebra de Banach, espacio de caracteres, topología débil-*.

Abstract

The goal of this paper is to state and to give a proof of the Gel'fand representation theorem for commutative Banach algebras with unity. In order to do that, we will previously develop the following subjects: weak-* topology on a dual space; the definition of an algebra and some examples, such as the space of continuous functions on a compact space; properties of invertibility, resolvent and spectrum of Banach algebras with unity; spaces of characters and maximal ideals of a Gel'fand algebra.

Key words: Gel'fand representation, Banach algebra, space of characters, weak-* topology.

Índice general

1. Introducción **1**
1.1. Algunos comentarios 1

2. Conceptos previos **3**
2.1. Espacios métricos y espacios normados 3
2.2. Axiomas de separación 8

3. Redes en espacios topológicos y topología débil-* **9**
3.1. Redes en espacios topológicos 9
3.2. Topología débil-* 12

4. Álgebras de Banach con unidad **21**
4.1. Concepto de álgebra 21
4.2. Ejemplos 24
4.3. Invertibilidad en álgebras de Banach con unidad 28
4.4. Resolvente y espectro en álgebras de Banach con unidad 32

5. Representación de Gel'fand de un álgebra de Banach conmutativa con unidad **36**
5.1. Lemas previos 36
5.2. Teorema de representación de Gel'fand 42
Bibliografía 50

A. Teorema de Hahn Banach **52**
Glosario de símbolos 54

Capítulo 1

Introducción

El teorema de representación de Gel'fand, cuyo nombre rinde honor al matemático de origen soviético Israel Gel'fand (1913-2009), es un resultado utilizado en análisis funcional para representar álgebras de Banach conmutativas a través de álgebras de funciones continuas. Es mediante su estudio, para el caso particular de álgebras con unidad, que el presente trabajo cobrará forma.

El teorema sostiene que, para un álgebra de Banach conmutativa con unidad A (que es, esencialmente, un espacio vectorial con la estructura de anillo conmutativo con unidad y que está dotado de una norma mediante la cual es completo), existe un espacio topológico compacto X de tal manera que A tiene un representante en $C(X)$, esto es, el espacio de funciones continuas de X en $\mathbb{C}$ con la norma supremo (que es, a su vez, un álgebra de Banach conmutativa con unidad). Dicho representante, que denotamos por $\widehat{A}$ y que es una subálgebra normada con unidad de $C(X)$, no es más que la imagen de A a través de un homomorfismo de álgebras continuo de A en $C(X)$ denominado transformada de Gel'fand (es decir, es la imagen de A mediante un homomorfismo de anillos que preserva el producto por escalar). Con ello, se puede relacionar cada elemento de A con una función continua de $C(X)$. Además, la "calidad" del representante de A se podrá medir a partir de las características adicionales que satisfaga el homomorfismo en cuestión. Así, cuando el homomorfismo sea además inyectivo, se tendrá que A y $\widehat{A}$ son isomorfos como álgebras. Y, si el homomorfismo es inyectivo e isométrico, se tendrá que A y $\widehat{A}$ son isométricamente isomorfos y, por ende, también homeomorfos.

Pues bien, el espacio compacto X para el cual se satisface todo lo anterior es el espacio de ideales maximales de A con la topología de Gel'fand (que, como veremos más adelante, es homeomorfo al espacio de caracteres, esto es, el espacio formado por los homomorfismos de álgebras de A en $\mathbb{C}$ dotado de la topología débil-* de subespacio).

1.1. Algunos comentarios

El carácter de esta memoria es de tipo autocontenido. Se ha optado por incluir y desarrollar con detalle la mayoría de los resultados y definiciones que, en menor o mayor grado, están implicados en la teoría que conforma el capítulo 5. Ejemplo de ello es la implementación de la sección 3.1 de redes en espacios topológicos, cuya aparición en este trabajo, aun siendo de interés secundario, tiene por motivo acometer determinadas demostraciones (como es el caso del lema 5.1.6). Es con esta estructura que el lector podrá realizar un seguimiento fluido del trabajo sin la necesidad de consultar para ello demasiadas referencias externas. Por otro lado, no será hasta la sección 3.2. que esta memoria adquiera sumo interés, pues es en dicho apartado donde se detallará minuciosamente cuál es la caracterización de la topología débil-* sobre un espacio dual. En el capítulo 4 se resumirán algunas de las características principales de las álgebras y finalmente en el capítulo 5 se abordará el teorema de Representación de Gel'fand.

En relación a la notación empleada, se ha incluido un glosario al final de la memoria para agilizar la búsqueda de los distintos términos que aparecieran. Asimismo, se ha indicado explícitamente el espacio al que pertenecen los diversos elementos neutros utilizados ($0_A, 1_{A/M}, 0_{\mathbb{C}}, ...$). Por otro lado, para indicar que dos espacios son homeomorfos se ha utilizado la notación $\simeq$ y para indicar que dos espacios son isomorfos se ha utilizado la notación $\cong$. Por último, cabe mencionar que, en todo momento a lo largo del trabajo, se ha supuesto que todo espacio vectorial tiene como cuerpo de escalares el cuerpo de los complejos.

Capítulo 2

Conceptos previos

2.1. Espacios métricos y espacios normados

A continuación, se enuncian algunas definiciones y resultados que serán utilizados durante el transcurso del trabajo. Para su desarrollo se ha seguido la teoría expuesta en [6] y [2].

Definición 2.1.1. *Un* ***espacio métrico****, denotado usualmente por M, es un par (M, d), donde M es un conjunto arbitrario no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una aplicación, llamada distancia o métrica, tal que, para cualesquiera $x, y, z \in M$, se satisface:*

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$ *si, y solo si,* $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definición 2.1.2. *Sea (M, d) un espacio métrico. Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en M tiene límite $l \in M$, y se denota por $\lim_n x_n = l$ ó $x_n \to l$ cuando $n \to \infty$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, l) < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$.*

Nota 2.1.1. *De la definición anterior se sigue que $\lim_n x_n = x$ y $\lim_n d(x_n, x) = 0$ son equivalentes.*

Definición 2.1.3. *Sea (M, d) un espacio métrico. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una* ***sucesión de Cauchy*** *si para todo $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$, para todo $n, m \geq N_\epsilon$.*

Proposición 2.1.1. *Sea (M, d) un espacio métrico. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy que contiene una subsucesión convergente $(x_{n_q})_{q\in\mathbb{N}}$ a un límite l, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge también a l.*

Demostración. Fijemos $\epsilon > 0$.
Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } n, m \geq N_1.$$

Además, $(x_{n_q})_{q\in\mathbb{N}}$ converge a un límite l por hipótesis, luego existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{n_q}, l) < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } q \geq N_2.$$

Ahora, como $(n_q)_{q\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente, basta fijar $q \geq max\{N_1, N_2\}$ para obtener que $n_q \geq q \geq N_1, N_2$. Por último, aplicando la desigualdad triangular se concluye que

$$d(x_n, l) \leq d(x_n, x_{n_q}) + d(x_{n_q}, l) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \text{ para todo } n \geq max\{N_1, N_2\}.$$

□

Definición 2.1.4. *Un espacio métrico se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Definición 2.1.5. *Sean $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ espacios métricos. Decimos que una aplicación $\phi : M_1 \to M_2$ es una isometría si, dados $x, y \in M_1$, se tiene que $d(x, y) = d(\phi(x), \phi(y))$.*

Definición 2.1.6. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un **espacio normado** es un par $(E, \|\cdot\|)$ formado por dicho espacio vectorial E junto con una aplicación $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, llamada norma, con las siguientes propiedades dados $x, y \in E, \alpha \in \mathbb{C}$ cualesquiera :*

1. $\|x\| \geq 0_{\mathbb{R}}$.
2. $\|x\| = 0_{\mathbb{R}}$ *si, y solo si,* $x = 0_E$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Nota 2.1.2. *Todo espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es a su vez un espacio métrico. Basta considerar la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$.*

Proposición 2.1.2. *Si E un espacio normado, entonces se satisface:*

$$|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x - y\| \text{ , para todo } x, y \in E.$$

Demostración. Dados $x, y \in E$, se tiene que $x = (x - y) + y$, $y = (y - x) + x$. Con ello, se satisface, aplicando la desigualdad triangular, que

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$
$$\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\|,$$

y, en definitiva, se tiene que

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

□

Corolario 2.1.1. *Sea E un espacio normado. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en E convergente con $\lim_n x_n = x$, entonces se tiene que $\lim_n \|x_n\| = \|x\|$.*

Definición 2.1.7. *Sean E, F espacios vectoriales. Se llama **operador lineal** S a cualquier aplicación lineal $S : E \to F$. Si $F = \mathbb{C}$ es el cuerpo de escalares, entonces se dice que S, denotado también como f, es un **funcional lineal**. Denotamos por $\mathscr{V}(E, F)$ al conjunto de los operadores lineales de E en F (es un espacio vectorial con la operaciones suma y producto por escalar puntuales).*

Definición 2.1.8. *Sean E, F espacios normados y $S : E \to F$ un operador lineal. Decimos que S está acotado si existe $k > 0$ tal que $\|S(x)\| \leq k\|x\|$, para todo $x \in E$.*

Nota 2.1.3. *En cálculo elemental, una función está acotada si el conjunto imagen está acotado. Sin embargo, no existe ninguna aplicación lineal* $S : E \to F$*, a excepción de la aplicación nula, ni ningún* $k > 0$ *tales que para todo* $x \in E$ *se cumpla que* $\|S(x)\| \leq k$ *(pues dado* $x \in E, x \neq 0_E$*, tal que* $\|S(x)\| = r$*, se tiene que* $y = \frac{2k}{r} \cdot x \in E$ *satisface que* $\|S(y)\| = \|\frac{2k}{r}S(x)\| = 2k \nleq k$*). Únicamente ocurre así para la bola unidad. De la definición 2.1.8 se deduce que, si* $S : E \to F$ *es un operador lineal acotado, entonces, para todo* $x \neq 0_E$*, se cumple que* $\dfrac{\|S(x)\|}{\|x\|} \leq k$*, para algún* $k > 0$*. Por tanto, el menor valor de* k *para el que se da la desigualdad es* $\sup\limits_{x \neq 0_E} \dfrac{\|S(x)\|}{\|x\|}$*. Esto motiva la siguiente definición:*

Definición 2.1.9. *Sean* E,F *espacios normados,* $E \neq \{0\}$*, y* $S : E \to F$ *un operador lineal y acotado. Se define la* ***norma del operador*** S *como* $\|S\| := \sup\limits_{x \neq 0_E} \dfrac{\|S(x)\|}{\|x\|}$.

Teorema 2.1.1. *Sean* E, F *espacios normados y* $S : E \to F$ *un operador lineal. Se tiene que* S *es un operador lineal acotado si, y solo si,* S *es un operador lineal continuo.*

Demostración. Véase en [2, p.166]. □

Nota 2.1.4. *Sean* E, F *espacios normados. Denotamos por* $\mathscr{L}(E, F)$ *al espacio normado formado por todos los operadores lineales y continuos* $S : E \to F$ *con respecto a la norma introducida en la definición 2.1.9 y las operaciones puntuales, suma y producto por escalar, dadas por* $(S + S')(x) := S(x) + S'(x)$ *y* $(\lambda S)(x) := \lambda S(x)$ *para todo* $S, S' \in \mathscr{L}(E, F)$*,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y para todo* $x \in E$*. Veamos, en primer lugar, que* $\mathscr{L}(E, F)$ *es un espacio vectorial:*
Se prueba de manera inmediata que $\mathscr{V}(E, F)$*, con las operaciones indicadas, es un espacio vectorial; comprobemos ahora que, dados* $S, S' \in \mathscr{L}(E, F)$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$*, los operadores lineales* $S + S'$ *y* λS *son continuos. Se tiene, por ser* S *y* S' *continuos, que existen* $k, k' \in \mathbb{C}$ *tales que* $\|S(x)\| \leq k\|x\|$ *y* $\|S'(x)\| \leq k'\|x\|$ *para todo* $x \in E$*. Por tanto, se sigue que* $\|(S + S')(x)\| = \|S(x) + S'(x)\| \leq \|S(x)\| + \|S'(x)\| \leq k\|x\| + k'\|x\| = (k + k')\|x\|$*. En definitiva,* $S + S'$ *es continuo. También, se satisface que* $\|(\lambda S)(x)\| = |\lambda| \cdot \|S(x)\| \leq |\lambda| \cdot k\|x\| = k''\|x\|$*, con* $k'' = |\lambda| \cdot k$*. Por consiguiente,* λS *es continuo. Con esto, concluimos que* $\mathscr{L}(E, F)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathscr{V}(E, F)$*.*
Sean $S, S' \in \mathscr{L}(E, F)$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Veamos ahora que* $\mathscr{L}(E, F)$ *es un espacio normado:*
Se tiene, por ser E *y* F *espacios normados, que* $\|S\| = \sup\limits_{x \neq 0_E} \frac{\|S(x)\|}{\|x\|} \geq 0$*; ahora, se sigue, por ser* S *lineal, que* $\|\lambda S\| = \sup\limits_{x \neq 0_E} \frac{\|(\lambda S)(x)\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \neq 0_E} \frac{\|\lambda S(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \cdot \|S\|$*; también, se satisface que* $\|S + S'\| = \sup\limits_{x \neq 0_E} \frac{\|(S+S')(x)\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \neq 0_E} \frac{\|S(x)+S'(x)\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{x \neq 0_E} \frac{\|S(x)\|}{\|x\|} + \sup\limits_{x \neq 0_E} \frac{\|S'(x)\|}{\|x\|} = \|S\| + \|S'\|$*; finalmente, si suponemos que* $\|S\| = 0_{\mathbb{R}}$*, entonces se tiene que* $\|S(x)\| = 0_{\mathbb{R}}$ *para todo* $x \in E \backslash \{0_E\}$ *y, con ello, que* $S(x) = 0_F$ *para todo* $x \in E$*. Si, por el contrario, suponemos que* $S(x) = 0_F$ *para todo* $x \in E$*, entonces* $\|S(x)\| = 0_{\mathbb{R}}$ *para todo* $x \in E \backslash \{0_E\}$*, luego* $\|S\| = 0_{\mathbb{R}}$*.*

Definición 2.1.10. *Sea* E *un espacio normado. Llamamos* ***dual*** *de* E *al espacio normado* $E' := \mathscr{L}(E, \mathbb{C}) = \{f : E \to \mathbb{C} : f \text{ es lineal y continuo}\}$*.*

Definición 2.1.11. *Sea* E *un espacio normado. Si* (E, d) *es completo con respecto a la métrica* $d(x, y) = \|x - y\|$*, entonces* E *se dice* ***espacio de Banach****.*

El resultado siguiente es de gran interés para llevar a cabo la prueba del lema 5.1.2:

Proposición 2.1.3. *Sean E un espacio de Banach y F un subespacio vectorial cerrado de E. Se tiene que E/F es un espacio de Banach con la norma*

$$||u||:= \inf\{\|x\| : x \in u\}, \text{ para cada } u \in E/F. \qquad (*)$$

Demostración. (véase [2]) Sabemos que E/F es un espacio vectorial. Ahora, para probar que E/F es un espacio normado, hay que demostrar que (*) satisface la definición de norma. Veámoslo:

Como $\|x\| \geq 0_{\mathbb{R}}$ para todo $x \in u$ con $u \in E/F$, se sigue que $0_{\mathbb{R}}$ es una cota inferior del conjunto $\{\|x\| : x \in u\}$, y, por tanto, $0_{\mathbb{R}} \leq \|u\|$; supóngase que $u = 0_{E/F} = F$. Como, por definición, F es subgrupo con la suma de E, $0_E \in u = F$. Es por ello que, como $\|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$, se sigue que $\|u\| = 0_{\mathbb{R}} = \inf\{\|x\| : x \in u\}$; sea ahora $u = y + F \in E/F$ tal que $\|u\| = 0_{\mathbb{R}}$. Es posible encontrar, por definición de ínfimo, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en u tal que $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótoma decreciente y converge al ínfimo, $\|x_n\| \to \|u\| = 0_{\mathbb{R}}$. Con ello, $\|x_n\| = \|x_n - 0_E\| = d(0_E, x_n) \to 0_{\mathbb{R}}$ y, por tanto, $x_n \to 0_E$. Ahora, como F es cerrado por hipótesis, se sigue que $y + F$ es cerrado (existe un homeomorfismo translación ψ_y de E en E dado por $\psi_y(w) = y + w$ para todo $w \in E$. Con ello, y como F es cerrado, se sigue que $\psi_y(F) = y + F$ es cerrado) y, por tanto, $0_E = \lim_n x_n \in u$. Por consiguiente, se concluye que $u = y + F = 0_E + F = 0_{E/F}$; veamos ahora que se satisface la desigualdad triangular. Sean pues $u, v \in E/F$. Se cumple para todo $x \in u, x' \in v$ que

$$\|x + x'\| = \|x + F + x' + F\| = \|(x + x') + F\| \leq \|x + x' + 0_E\| = \|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\|,$$

(donde la desigualdad primera se justifica con (*) y teniendo en cuenta que $x + x' + 0_E \in (x + x') + F$). Con ello, se sigue que

$$\begin{aligned} \|u + v\| &\leq \inf\{\|x\| + \|x'\| : x \in u, x' \in v\} \\ &= \inf\{\|x\| : x \in u\} + \inf\{\|x'\| : x' \in v\} \\ &= \|u\| + \|v\|; \end{aligned}$$

veamos ahora que $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y para todo $u = y + F \in E/F$. Si $\lambda = 0_{\mathbb{C}}$, el resultado es inmediato. Supóngase que $\lambda \neq 0_{\mathbb{C}}$. Se sigue que $F = \{\lambda z : z \in F\}$ (la inclusión de derecha a izquierda se tiene porque F es un espacio vectorial; la otra inclusión se tiene ya que, dado $z' \in F$, $z' = \lambda z$ con $z = \lambda^{-1} z' \in F$). Con ello,

$$\lambda u = \lambda y + F = \{\lambda y + z : z \in F\} = \{\lambda y + \lambda z : z \in F\} = \{\lambda(y + z) : z \in F\}$$

y, por tanto, se sigue que

$$\begin{aligned} \|\lambda u\| &= \inf\{\|\lambda(y + z)\| : z \in F\} = \inf\{|\lambda| \cdot \|y + z\| : z \in F\} = \\ &= |\lambda| \cdot \inf\{\|y + z\| : z \in F\} = |\lambda| \cdot \inf\{\|x\| : x \in u\} = \\ &= |\lambda| \cdot \|u\|. \end{aligned}$$

Queda probado que E/F es un espacio normado.

A continuación, procedamos a estudiar la completitud de E/F. Para ello, consideremos la distancia d dada por $d(u, v) = \|v - u\|$ para todo $u, v \in E/F$. Sea pues $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E/F. Tenemos que demostrar que existe $u \in E/F$ tal que $u_p \to u$. Pues bien, la estrategia a seguir consiste en encontrar una subsucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergente en E/F. Probado esto, concluiremos, aplicando la proposición 2.1.1, que la sucesión de partida converge en E/F. Veámoslo:

Se tiene, por ser $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, que, dado $\epsilon_n = \frac{1}{2^n} > 0$ con $n \in \mathbb{N}$, existe $N_{\epsilon_n} \in \mathbb{N}$ tal que

$d(u_p, u_q) < \epsilon_n$ para todo $p, q \geq N_{\epsilon_n}$. Con ello, si previamente suponemos que $N_{\epsilon_n} < N_{\epsilon_{n+1}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos definir nuestra subsucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$b_n = u_{N_{\epsilon_n}} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Dicha subsucesión satisface para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$d(b_n, b_{n+1}) = \|b_{n+1} - b_n\| < \frac{1}{2^n} = \epsilon_n \qquad (1)$$

(dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene, por ser $N_{\epsilon_n}, N_{\epsilon_{n+1}} \geq N_{\epsilon_n}$, que $d(u_{N_{\epsilon_n}}, u_{N_{\epsilon_{n+1}}}) < \epsilon_n$). Para probar que dicha subsucesión converge, construiremos una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E convergente a $y \in E$ tal que $b_n = y_n + F$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y veremos que $b_n = y_n + F \to y + F$. Pues bien, para construir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ necesitamos definir previamente una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E que satisface lo siguiente:

$$\begin{gathered} x_0 \in b_0; \\ x_n \in b_n - b_{n-1},\ n \geq 1; \\ \|x_n\| < \|b_n - b_{n-1}\| + \tfrac{1}{2^n},\ \ n \geq 1 \qquad (2) \end{gathered}$$

(esto último es posible porque, por definición de ínfimo, se puede encontrar para todo $\epsilon > 0$ un $x \in u$ tal que $\|x\| - \|u\| < \epsilon$, siendo $u \in E/F$).
Ahora, consideraremos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E como

$$y_n = \textstyle\sum_{i=0}^n x_i.$$

Se tiene, por construcción, que $y_n \in b_0 + b_1 - b_0 + ... + b_n - b_{n-1} = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, que $b_n = y_n + F$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene, por (1) y (2), que

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+1}) &= \|y_{n+1} - y_n\| = \|x_{n+1}\| < \|b_{n+1} - b_n\| + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, se obtiene, dado p cualquier natural y $n \in \mathbb{N}$ fijo, que

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+p}) &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} d(y_k, y_{k+1}) < \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, si fijamos $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$d(y_{N_\epsilon}, y_{N_\epsilon + p}) \leq \frac{1}{2^{N_\epsilon - 2}} < \epsilon \text{ para cada } p \in \mathbb{N}.$$

Además, como para todo $n \geq N_\epsilon$ se tiene que $\dfrac{1}{2^{n-2}} \leq \dfrac{1}{2^{N_\epsilon - 2}}$, se sigue que

$$d(y_n, y_{n+p}) < \epsilon \text{ para todo } n \geq N_\epsilon \text{ y para todo } p \in \mathbb{N},$$

es decir, que $d(y_n, y_m) < \epsilon$ si $n, m \geq N_\epsilon$. Por tanto, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y, como por definición E es completo, existe $y \in E$ tal que $y_n \to y$.
Una vez visto esto, únicamente resta comprobar que $b_n = y_n + F \to y + F$. Para ello, veamos que $d(y_n + F, y + F) = \|y + F - y_n + F\| = \|(y - y_n) + F\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto se satisface ya que, por (*), se tiene para todo $x \in F$ que

$$\|y - y_n + F\| \leq \|y - y_n + x\| \leq \|y - y_n\| + \|x\|$$

y, haciendo tender al límite, se sigue que

$$\lim_n \|(y - y_n) + F\| \leq \lim_n \|y - y_n\| + \lim_n \|x\| = 0 + \|x\| = \|x\|,$$

de donde es inmediato que $\|(y - y_n) + F\| \to 0$, sin más que tomar $\|x\| = 0_\mathbb{R}$ con $x = 0_F = 0_E$ en la desigualdad anterior.
Por tanto, la subsucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en E/F al límite $y + F$ y, por la proposición 2.1.1, se sigue que la sucesión de partida $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tiene límite en E/F (que es justamente $y + F$).
En definitiva, se concluye que E/F es completo y, con ello, que E/F es un espacio de Banach. □

2.2. Axiomas de separación

En esta sección introducimos algunas propiedades topológicas (véase [7]) que dotan a los espacios topológicos de la capacidad de separar sus elementos o conjuntos cerrados por medio de abiertos. La motivación de su breve, aunque necesaria implementación, reside en nuestro interés por realizar un estudio de las representaciones de Gel'fand de los espacios de funciones continuas $C(X)$ y $C_b(X)$. En dichos espacios, se requiere que X posea, como condición mínima de separación, la propiedad de ser Tychonoff. Ya que, de no ser así, no se podría garantizar la existencia de un número suficiente de funciones continuas. Pues bien, más adelante estudiaremos qué satisface $C(X)$ cuando X sea compacto y Hausdorff (y, por ello, T_4), como también qué satisface $C_b(X)$ cuando X sea Tychonoff.

Definición 2.2.1. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es T_1 o **Fréchet** si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$ pero $y \notin U$.*

Definición 2.2.2. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es T_2 o **Hausdorff** si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen sendos abiertos $U, V \subset X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 2.2.3. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es **completamente regular** si para todo $x \in X$ y para todo cerrado $C \subset X$ tal que $x \notin C$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(C) = \{1\}$. Se dice que X es **Tychonoff** o $T_{3\frac{1}{2}}$ si X es un espacio T_1 completamente regular.*

Definición 2.2.4. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es **normal** si dados C y C' cerrados disjuntos en X, existen U y U' abiertos disjuntos en X tales que $C \subset U$ y $C' \subset U'$. Se dice que X es T_4 si X es un espacio T_1 normal.*

Nota 2.2.1. *Nótese que, dado X un espacio topológico, las propiedades de separación T_1, T_2, $T_{3\frac{1}{2}}$ y T_4 en X son, por orden de mención, cada vez más fuertes. Por tanto, se tiene, como ejemplo, que si X es T_4, entonces X es a su vez $T_{3\frac{1}{2}}, T_2$ y T_1. Asimismo, se satisface que, si X es un espacio topológico compacto y Hausdorff, entonces X es T_4 (y, en definitiva, todo lo anterior).*

Capítulo 3

Redes en espacios topológicos y topología débil-*

3.1. Redes en espacios topológicos

Existen espacios topológicos para los cuales no es posible acercarse a algunos de sus elementos mediante sucesiones. Es por ello que no es factible, por lo general, caracterizar aplicaciones continuas entre espacios topológicos por medio de sucesiones (esto sí es posible si consideramos por ejemplo espacios topológicos metrizables, es decir, espacios topológicos que son homeomomorfos a espacios métricos). Pues bien, vamos a ampliar la definición de sucesión a un concepto más genérico denominado red. Dicho concepto garantiza algunos resultados que son válidos sobre cualquier tipo de espacio topológico. Y, como aplicación, daremos una construcción de la topología débil-* en la nota 3.2.3 (topología que, de partida, no conocemos qué naturaleza tiene) basándonos en la caracterización de la continuidad en términos de redes.
Para el desarrollo de esta sección seguimos la teoría presentada en [3, p. 371-374]. No obstante, vamos a recordar previamente la siguiente definición:

Definición 3.1.1. *Sean Y un conjunto no vacío y R una relación binaria definida en Y. Decimos que Y es un **conjunto ordenado** respecto a R, y lo denotamos por (Y, R), si R es una **relación de orden**, esto es, una relación binaria que satisface lo siguiente:*

1. *aRa para todo $a \in Y$ (propiedad reflexiva).*
2. *Si aRb y bRa, entonces $a = b$ (propiedad antisimétrica).*
3. *Si aRb y bRc, entonces aRc (propiedad transitiva).*

*Si adicionalmente R satisface que, para todo $a, b \in Y$, se tiene que aRb ó bRa, entonces diremos que (Y, R) es un conjunto **totalmente ordenado**. Si en cambio R satisface que existen $a, b \in Y$ tales que aRb ó bRa, entonces diremos que (Y, R) es un conjunto **parcialmente ordenado**.*

Nota 3.1.1. *Todo conjunto totalmente ordenado es también parcialmente ordenado. Obviamente, el recíproco no es cierto en general: basta considerar $(Y, \subseteq)$ con $Y = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.*

Hasta el momento hemos trabajado con el conjunto de los números naturales para hablar de sucesiones en espacios topológicos, siendo $\mathbb{N}$ un caso particular de conjunto totalmente ordenado cuya relación binaria establecida entre sus elementos es la de ser "menor o igual". Sin embargo, nuestra intención ahora es hacer uso de un conjunto más genérico que desempeñe el "papel" que tiene $\mathbb{N}$ en las sucesiones con el fin de crear una generalización del concepto de sucesión. Para ello, se introduce la siguiente definición:

Definición 3.1.2. *Un* ***conjunto dirigido****, denotado genéricamente por $(D, \leq)$ o simplemente D, es un conjunto parcialmente ordenado D dotado de una relación de orden $\leq$, que satisface que para todo $x, y \in D$ existe $z \in D$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$.*

Ejemplo 3.1.1. *El conjunto de los números naturales es un conjunto dirigido.*

Ejemplo 3.1.2. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $x_0 \in X$. Consideremos el conjunto $\mathscr{U}_{x_0} := \{U \in \tau_X : x_0 \in U\}$ junto con la relación de orden $\leq$ dada por $U \leq V$ si, y solo si, $U \supset V$. Se tiene que $(\mathscr{U}_{x_0}, \leq)$ es un conjunto dirigido y decimos que $\mathscr{U}_{x_0}$ está ordenado por inclusión inversa.*

Ejemplo 3.1.3. *Sea Y un conjunto no vacío. Consideremos la familia de subconjuntos $\mathscr{F} = \{C \subset Y : C$ es finito $\}$ junto con la relación de orden $\leq$ dada por $C_1 \leq C_2$ si, y solo si, $C_1 \subset C_2$. Se tiene que $(\mathscr{F}, \leq)$ es un conjunto dirigido y decimos que $\mathscr{F}$ está ordenado por inclusión. En el caso del conjunto $\mathbb{N}$, podemos definir así, basándonos en la familia de subconjuntos finitos, un conjunto dirigido que no guarda relación con el orden habitual en $\mathbb{N}$.*

Una vez introducido el concepto de conjunto dirigido, ya tiene sentido definir una red:

Definición 3.1.3. *Sea X un espacio topológico. Una* ***red*** *en X es un par $((D, \leq), r)$ formado por un conjunto dirigido $(D, \leq)$ y una aplicación $r : D \to X$. Denotamos por $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$, o simplemente $(x_\alpha)_\alpha$, a una red en X.*

Ejemplo 3.1.4. *Toda sucesión en un espacio topológico X es una red. En este caso, la aplicación dada en la definición 3.1.3 es de la forma $r : \mathbb{N} \to X$.*

Ejemplo 3.1.5. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Consideremos el conjunto dirigido definido en el ejemplo 3.1.2, $(\mathscr{U}_{x_0}, \leq)$, y la aplicación r dada por:*

$$\begin{aligned} r \colon \mathscr{U}_{x_0} &\to X \\ \alpha &\to x_\alpha \in \alpha \end{aligned}$$

Se tiene que el par $((\mathscr{U}_{x_0}, \leq), r)$ es una red en X, $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{U}_{x_0}}$, con la propiedad de que $x_\alpha \in \alpha$ para todo $\alpha \in \mathscr{U}_{x_0}$.

Definición 3.1.4. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico, $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ una red en X y $x_0 \in X$. Diremos que $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ es una* ***red convergente*** *a x_0, y lo denotamos por $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = x_0$ ó $x_\alpha \to x_0$, si para todo $U \in \tau_X$ tal que $x_0 \in U$, existe $\alpha_U \in D$ de tal manera que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha_U$ (es decir, $\alpha_U \leq \alpha$).*

Nota 3.1.2. *Cabe mencionar que, al igual que ocurre con las sucesiones, dado un espacio topológico X, una red convergente en X tiene límite único si, y solo si, X es un espacio Hausdorff.*

Ejemplo 3.1.6. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. La red definida en el ejemplo 3.1.5, $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{U}_{x_0}}$, es convergente y su límite es x_0. Veámoslo:*
Sea $U \in \tau_X$ tal que $x_0 \in U$. Se sigue que $U \in \mathscr{U}_{x_0}$. Ahora, si consideramos $\alpha_U = U$ se tiene que, para todo $\alpha \geq \alpha_U$, es decir, para todo $\alpha \subset \alpha_U$, se cumple que $x_\alpha \in \alpha \subset \alpha_U = U$ (por construcción, siempre se satisface que $x_\alpha \in \alpha$). Por tanto, $x_\alpha \to x_0$.

A continuación, introducimos dos resultados que serán posteriormente aplicados :

Proposición 3.1.1. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico e $Y \subset X$. Se tiene que $x_0 \in \overline{Y}$ si, y solo si, existe una red $(x_\alpha)_\alpha$ en Y tal que $x_\alpha \to x_0$.*

Demostración. Supongamos que $x_0 \in \overline{Y}$. Se sigue, por definición de clausura, que para todo $U \in \mathscr{U}_{x_0}$ (véase el ejemplo 3.1.2) se tiene que $U \cap Y \neq \emptyset$, es decir, que para todo $U \in \mathscr{U}_{x_0}$ existe $x_U \in U$ tal que $x_U \in Y$. Por tanto, si consideramos la red $(x_U)_{U \in \mathscr{U}_{x_0}}$ tal que $x_U \in Y$ para todo $U \in \mathscr{U}_{x_0}$, entonces se tiene que $x_U \to x_0$ (véase el ejemplo 3.1.6). En definitiva, hemos encontrado una red en Y que converge a x_0.
Supongamos ahora que $(x_\alpha)_\alpha$ es una red en Y tal que $x_\alpha \to x_0$. Tenemos que ver que, dado $U_0 \in \tau_X$ tal que $x_0 \in U_0$, se tiene que $U_0 \cap Y \neq \emptyset$:
Tenemos, por definición de red convergente, que, para U_0, existe α_{U_0} tal que $x_\alpha \in U_0$ para todo $\alpha \geq \alpha_{U_0}$. Es decir, si consideramos $\alpha \geq \alpha_{U_0}$, entonces se tiene que $x_\alpha \in Y \cap U_0$. Por lo tanto, es evidente que $U_0 \cap Y \neq \emptyset$. $\square$

Nota 3.1.3. *De la proposición anterior se deduce que, dado un espacio topológico (X, τ_X), la clausura de $Y \subset X$ coincide con el conjunto siguiente:*

$$\overline{Y} = \{\lim_\alpha x_\alpha : (x_\alpha)_\alpha \textit{ es una red en } Y \textit{ convergente}\}$$

Por tanto, un conjunto $Y \subset X$ será cerrado cuando toda red $(x_\alpha)_\alpha$ en Y que sea convergente satisfaga que su límite está también en Y, es decir, que $\overline{Y} \subset Y$ (y, por tanto, que $\overline{Y} = Y$).

Proposición 3.1.2. *Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación. Se tiene que f es continua en $x_0 \in X$ si, y solo si, para toda red $(x_\alpha)_\alpha$ en X con $x_\alpha \to x_0$ se cumple que $f(x_\alpha) \to f(x_0)$.*

Demostración. Supongamos que f es continua en x_0 y fijemos $V \in \tau_Y$ tal que $f(x_0) \in V$. Se tiene, por definición de continuidad, que existe $U \in \tau_X$ con $x_0 \in U$ y tal que $f(U) \subset V$. Pues bien, si consideramos en X una red $(x_\alpha)_\alpha$ tal que $x_\alpha \to x_0$, se cumple, por definición de red convergente, que, como $x_0 \in U$, existe α_U tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha_U$. Por tanto, se sigue que $f(x_\alpha) \in f(U) \subset V$ para todo $\alpha \geq \alpha_U$. En otras palabras, hemos encontrado $\alpha_V = \alpha_U$ tal que $f(x_\alpha) \in V$ para todo $\alpha \geq \alpha_V$. Por ello, $(f(x_\alpha))_\alpha$ es una red convergente a $f(x_0)$.
Ahora, consideremos el conjunto $\mathscr{U}_{x_0}$ introducido en el ejemplo 3.1.2 y supongamos que, dado $x_0 \in X$, se tiene, por un lado, que toda red $(x_\alpha)_\alpha$ en X con $x_\alpha \to x_0$ satisface que $f(x_\alpha) \to f(x_0)$ y, por otro lado, que f no es continua en x_0. Pues bien, se sigue, por esto último, que existe $V \in \tau_Y$ con $f(x_0) \in V$ y tal que $f(U) \backslash V \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathscr{U}_{x_0} = \{U \in \tau_X : x_0 \in U\}$ (es decir, para todo abierto U que contiene a x_0 podemos hallar $x_U \in U$ tal que $f(x_U) \notin V$). Con ello, podemos construir una red $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{U}_{x_0}}$ en X (véase el ejemplo 3.1.5) tal que $x_\alpha \in \alpha$ y $f(x_\alpha) \notin V$ para todo $\alpha \in \mathscr{U}_{x_0}$. Dicha red converge a x_0 (véase el ejemplo 3.1.6). No obstante, la red $(f(x_\alpha))_{\alpha \in \mathscr{U}_{x_0}}$ que, por hipótesis, tendría que converger a $f(x_0)$, no lo hace por construcción (como no existe ningún $\alpha \in \mathscr{U}_{x_0}$ tal que $f(x_\alpha) \in V$, es evidente que tampoco puede existir $\alpha_V \in \mathscr{U}_{x_0}$ tal que $f(x_\alpha) \in V$ para todo $\alpha \geq \alpha_V$). Llegamos a una contradicción y concluimos, por tanto, que f ha de ser continua en x_0.
Queda probado. $\square$

3.2. Topología débil-*

Generalmente, dados un conjunto cualquiera Y, una familia $\{X_i : i \in I\}$ de espacios topológicos y una familia de funciones

$$\mathscr{G} := \{f_i : Y \to X_i : i \in I\},$$

se define la topología inicial en Y inducida por $\mathscr{G}$ como la topología más gruesa sobre Y que hace continua a f_i para todo $i \in I$.
Se tiene, por ejemplo, que para cualquier espacio topológico (X, τ) y cualquier subconjunto W de X, la topología inicial en W inducida por la aplicación inclusión $i : W \to X$ se corresponde con la topología de subespacio τ_W.
Dado un espacio normado E, nuestro propósito en esta sección consiste en dotar al espacio dual E' de E de la topología más gruesa que satisfaga, grosso modo, que determinados funcionales lineales sobre E' son continuos. Llamaremos topología débil-* a la topología inicial sobre E' que cumple lo anterior. Y, aunque el estudio acerca de su naturaleza (véase [2, p. 155-157]) se puede realizar partiendo de espacios más genéricos, como son los espacios vectoriales topológicos localmente convexos y Hausdorff, se ha simplificado su construcción restringiéndonos al caso particular de los espacios normados con el fin de poder aplicarlo, a posteriori, en el teorema de Banach-Alaoglu.
A continuación, introducimos algunos conceptos necesarios:

Definición 3.2.1. *Sean E, F espacios vectoriales. Se dice que E y F están en* ***dualidad*** *si existe una aplicación $B : E \times F \to \mathbb{C}$ cumpliendo para cualesquiera $x, x' \in E$, $y, y' \in F$, $\lambda \in \mathbb{C}$ lo siguiente:*

1. $B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y)$,
2. $B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$,
3. $B(x, y + y') = B(x, y) + B(x, y')$,
4. $B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y)$,
5. *si* $B(x, y) = 0$ *para todo* $y \in F$, *entonces* $x = 0_E$,
6. *si* $B(x, y) = 0$ *para todo* $x \in E$, *entonces* $y = 0_F$.

En otras palabras, B es una aplicación bilineal que satisface las propiedades 5 y 6. Decimos que B es una aplicación que define una dualidad entre E y F.

Nota 3.2.1. *Sean E y F espacios vectoriales y B una aplicación que define una dualidad entre ambos espacios. Se tiene que las aplicaciones*

$$B_x(y) = B(x, y), \; B^y(x) = B(x, y)$$

definen sendos funcionales lineales con $x \in E$ e $y \in F$ fijos respectivamente.

Teorema 3.2.1. *Sean E y F espacios vectoriales y B una aplicación que define una dualidad entre ambos espacios. Se tiene que tanto la aplicación $x \mapsto B_x$ de E en el espacio vectorial de los funcionales lineales sobre F, $\mathscr{V}(F, \mathbb{C})$, como la aplicación $y \mapsto B^y$ de F en el espacio vectorial de los funcionales lineales sobre E, $\mathscr{V}(E, \mathbb{C})$, definen sendos operadores lineales inyectivos.*

Demostración. Se prueba de manera inmediata que, a partir de la definición de dualidad, cada una de las aplicaciones es lineal. Ahora, para ver que los núcleos de dichas aplicaciones son, respectivamente, $\{0_E\}$ y $\{0_F\}$, basta aplicar la condición 5 de dualidad para el primer operador y la condición 6 de dualidad para el segundo operador. $\square$

Definición 3.2.2. *Sean E, F espacios vectoriales y B una aplicación que define una dualidad entre ambos espacios. La topología sobre E inducida por F y B, denotada por $\sigma(E, F)$, es la topología más gruesa sobre E que hace continuo a todo funcional lineal $B^y : E \to \mathbb{C}$, con $y \in F$. De modo análogo, la topología sobre F inducida por E y B, denotada por $\sigma(F, E)$, es la topología más gruesa sobre F que hace continuo a todo funcional lineal $B_x : F \to \mathbb{C}$, con $x \in E$.*

En resumen, dados dos espacios vectoriales E y F y una dualidad B establecida entre ellos, se puede definir en cualquiera de los dos espacios una topología inicial inducida por la familia de funcionales lineales que origina B con respecto al otro espacio.
A continuación, vamos a ver que, dados un espacio normado E y su espacio dual $F = E'$, las topologías débil y débil-* son un caso particular de lo anteriormente descrito y se construyen a partir de la siguiente dualidad:

Ejemplo 3.2.1. *Sean E un espacio vectorial y F el espacio vectorial de todos los funcionales lineales sobre E, esto es, $F = \mathscr{V}(E, \mathbb{C})$. Llamamos **dualidad canónica** a la dualidad entre E y F dada por la aplicación:*

$$B(x, f) = f(x) \quad \text{para todo } x \in E, f \in F.$$

Veamos que se satisface la condición 5 relativa a la definición 3.2.1 de dualidad (el resto de condiciones se prueban de manera inmediata):
Consideremos $x \in E \backslash \{0_E\}$ y la seminorma p_x introducida en el ejemplo A.0.3. Se tiene, aplicando el corolario A.0.1, que existe $f \in F$ tal que

$$f(x) = p_x(x).$$

Ahora, por definición, $p_x(x) = 1_{\mathbb{R}}$. Es decir, dado cualquier $x \in E \backslash \{0_E\}$ podemos encontrar $f \in F$ tal que $f(x) \neq 0_{\mathbb{C}}$. Por consiguiente, el único $x \in E$ tal que $f(x) = 0_{\mathbb{C}}$ para todo $f \in F$ es justamente $x = 0_E$.

Ejemplo 3.2.2. *Sean E un espacio normado y $F = E'$ su espacio dual. Se tiene, para todo $x \in E, f \in E'$, que la aplicación $B(x, f) = f(x)$ define una dualidad canónica entre E y E'. En este caso, como también ocurre en el ejemplo 3.2.1, la condición 5 de la definición 3.2.1 es la única que no es inmediata de probar. La estrategia a seguir para su consecución es análoga y se basa en hacer uso del teorema A.0.2.*

Definición 3.2.3. *Sea E un espacio normado. Sabemos, por el ejemplo 3.2.2, que existe una dualidad entre E y E' (la dualidad canónica). Con esto, llamamos topología **débil** y topología **débil-*** a las topologías $\sigma(E, E')$ y $\sigma(E', E)$, respectivamente. Por tanto, $\sigma(E, E')$ es la topología más gruesa sobre E que hace continuo todo funcional lineal $B^f : E \to \mathbb{C}$, con $f \in E'$, y $\sigma(E', E)$ es la topología más gruesa sobre E' que hace continuo todo funcional lineal $B_x : E' \to \mathbb{C}$, con $x \in E$.*

Nota 3.2.2. *Para cualquier propiedad que se satisfaga en un espacio dotado de la topología débil-* diremos que es una propiedad débil-*.*

Nota 3.2.3. *Hemos definido la topología débil-* en E' como la topología más gruesa que hace continuo el funcional lineal*

$$\begin{aligned} B_x \colon E' &\to \mathbb{C} \\ f &\to B_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. No obstante, a simple vista no es evidente saber qué forma tiene dicha topología, así que, a continuación, ofrecemos una construcción:
Fijemos $x_0 \in E, f_0 \in E'$. Sabemos, por la proposición 3.1.2, que la aplicación B_{x_0} será continua en f_0 si, y solo si, para toda red $(f_\alpha)_\alpha$ en E' tal que $f_\alpha \to f_0$, se satisface que $B_{x_0}(f_\alpha) \to B_{x_0}(f_0)$, es decir, $f_\alpha(x_0) \to f_0(x_0)$. Sin embargo, no podemos hablar de redes en E' ni, por tanto, de redes convergentes, sin antes haber definido una topología en dicho espacio. De ahí que la estrategia a seguir consista en elegir $S_{x_0,f_0} \subset \mathscr{P}(E')$ de tal manera que S_{x_0,f_0}, interpretada como subbase, nos genere una topología $\tau_{S_{x_0,f_0}}$ donde ya sea posible construir redes convergentes y que además permita a $B_{x_0}(f)$ ser continua en f_0. Sean, por tanto, $\epsilon > 0$, $(D, \leq)$ un conjunto dirigido y $r : D \to E'$ una aplicación cualesquiera. Nos preguntamos lo siguiente:
¿Qué clase de conjuntos $U \in \mathscr{P}(E')$, con $f_0 \in U$, podemos incluir en S_{x_0,f_0} (y, por tanto, en $\tau_{S_{x_0,f_0}}$) de tal manera que E' dotado de la topología generada por S_{x_0,f_0} nos permita hablar propiamente de r como una red, que denotamos por $(f_\alpha)_\alpha$, y que satisface que, si $f_\alpha \in U$ para todo α mayor o igual que un cierto α_U, entonces se tenga que $|f_\alpha(x_0) - f_0(x_0)| < \epsilon$ para todo $\alpha \geq \alpha_U$?
Pues bien, la respuesta se encuentra en el conjunto siguiente:

$$U_{x_0}(f_0; \epsilon) := \{f \in E' : |f(x_0) - f_0(x_0)| < \epsilon\}.$$

En dicho conjunto, basta variar $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ para construir una subbase, que denotamos por S_{x_0,f_0}, de tal manera que E' junto con la topología generada por dicha subbase, denotada por $\tau_{S_{x_0,f_0}}$, hace continua a B_{x_0} en f_0. Por tanto, dicha subbase es la familia

$$S_{x_0,f_0} = \{U_{x_0}(f_0; \epsilon) : \epsilon \in \mathbb{R}^+\}.$$

Es evidente que $E' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{x_0}(f_0; n)$. Además, una base de $\tau_{S_{x_0,f_0}}$ es la propia subbase S_{x_0,f_0}, puesto que, dados $k \in \mathbb{N}, \epsilon_1, ..., \epsilon_k \in \mathbb{R}^+$, se tiene que

$$\textstyle\bigcap_{j=1}^k U_{x_0}(f_0; \epsilon_j) = U_{x_0}(f_0; \epsilon_m),\ \epsilon_m = \text{mín}\{\epsilon_1, ..., \epsilon_k\}.$$

Ahora que E' tiene asignado una topología, el siguiente paso consiste en demostrar que, efectivamente, $B_{x_0}(f)$ es continua en f_0:
Sea $(f_\alpha)_\alpha$ una red en E' tal que $f_\alpha \to f_0$. Tenemos que probar que $B_{x_0}(f_\alpha) = f_\alpha(x_0) \to f_0(x_0) = B_{x_0}(f_0)$, es decir, que para cada $V \in \tau_{\mathbb{C}}$ tal que $f_0(x_0) \in V$ existe α_V de tal manera que $f_\alpha(x_0) \in V$ para todo $\alpha \geq \alpha_V$ (en realidad, basta probar que existe α_V tal que $f_\alpha(x_0) \in B(f_0(x_0); r)$ para todo $\alpha \geq \alpha_V$, siendo $B(f_0(x_0); r) \subset V$ para algún $r > 0$). Para ver esto, consideremos el abierto $U \in \tau_{S_{x_0,f_0}}$ dado por:

$$U = U_{x_0}(f_0; r).$$

Se tiene que, como $f_\alpha \to f_0$ y $f_0 \in U$, existe α_U tal que $f_\alpha \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha_U$. Por ello, $|f_\alpha(x_0) - f_0(x_0)| < r$ para todo $\alpha \geq \alpha_U$, es decir, $f_\alpha(x_0) \in B(f_0(x_0); r)$ para todo $\alpha \geq \alpha_U$. Por tanto, el α_V buscado es justamente $\alpha_V = \alpha_U$.
En resumen, hemos probado que $B_{x_0}(f)$ es continua en f_0 para la topología $\tau_{S_{x_0,f_0}}$ construida en E'. Sin embargo, para obtener una topología en E' tal que $B_x(f)$ sea continua en f_0 para todo $x \in E$ hay que ampliar la subbase anterior. Para ello, definamos la subbase siguiente:

$$S_{f_0} = \{U_x(f_0;\epsilon) : x \in E, \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$$

Es evidente que, dado cualquier $x \in E$, $E' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_x(f_0;n)$. Además, la topología $\tau_{S_{f_0}}$ generada por S_{f_0} tiene como base al conjunto de elementos de la siguiente forma, con $x_1,...,x_k \in E, \epsilon_1,...,\epsilon_k \in \mathbb{R}^+$:

$$U_{x_1,...,x_k}(f_0;\epsilon_1,...,\epsilon_k) := \bigcap_{j=1}^k U_{x_j}(f_0;\epsilon_j).$$

Y, para ver que $B_x(f)$ es continua en f_0 para todo $x \in E$, basta proceder de modo similar a como se hizo en el caso anterior.
Finalmente, podemos obtener una topología que para todo $x \in E$ haga continua a la aplicación $B_x(f)$ con $f \in E'$. Basta considerar la subbase siguiente:

$$S = \{U_x(f;\epsilon) : x \in E, f \in E', \epsilon \in \mathbb{R}^+\}.$$

Es evidente que, dados cualesquiera $x \in E, f \in E'$, $E' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_x(f;n)$. Además, la topología τ_S generada por S tiene como base al conjunto de elementos de la siguiente forma, con $x_1,...,x_k \in E, f_1,...,f_k \in E', \epsilon_1,...,\epsilon_k \in \mathbb{R}^+$:

$$U_{x_1,...,x_k}(f_1,...,f_k;\epsilon_1,...,\epsilon_k) := \bigcap_{j=1}^k U_{x_j}(f_j;\epsilon_j). \qquad (*)$$

Nuevamente, para ver que $B_x(f)$ es continua para cualquier $x \in E$ en todo $f \in E'$ no hay más que repetir el procedimiento empleado en el primer caso.
Ahora, únicamente queda probar que $\tau_S = \sigma(E',E)$, es decir, que τ_S es la topología más gruesa que hace continua a todas las B_x. Para ello, consideremos otra topología τ' tal que para todo $x \in E$ haga continua a la aplicación $B_x(f)$ con $f \in E'$. Se tiene, para dicha topología, que $B_x^{-1}(B(f(x);\epsilon)) = U_x(f;\epsilon)$ es un conjunto abierto, como también son conjuntos abiertos las intersecciones de la forma $(*)$, es decir, la base de τ_S está contenida en τ'. Por tanto, es inmediato que $\tau_S \subset \tau'$ y también que τ_S es igual a $\sigma(E',E)$.

Proposición 3.2.1. *Sea E un espacio normado. Una base de la topología débil-* en E' viene dada por la familia*

$$\beta_{E'} = \{U_{x_1,...,x_k}(g;\epsilon) : k \in \mathbb{N}, x_1,...,x_k \in E, g \in E', \epsilon > 0\}$$

(siendo $U_{x_1,...,x_k}(g;\epsilon) := \{h \in E' : |h(x_1) - g(x_1)| < \epsilon, ..., |h(x_k) - g(x_k)| < \epsilon\}$ un abierto de $\sigma(E',E)$ descrito en la nota anterior).

Demostración. Dados $k \in \mathbb{N}$, $x_1,...,x_k \in E$, $f_1,...,f_k \in E'$, $\epsilon_1,...,\epsilon_k > 0$, consideremos el abierto siguiente:

$$V = U_{x_1,...,x_k}(f_1,...,f_k;\epsilon_1,...,\epsilon_k) \in \sigma(E',E)$$

(podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que un abierto V en $\sigma(E',E)$ tiene dicha forma porque, como vimos en la nota anterior, los elementos de la forma $U_{x_1,...,x_k}(f_1,...,f_k;\epsilon_1,...,\epsilon_k)$ configuran una base de $\sigma(E',E)$). Sea también un elemento cualquiera $g \in V$ de dicho abierto. Si probamos que existe un abierto $B \in \beta_{E'}$ tal que $g \in B \subset V$, entonces concluiremos que $\beta_{E'}$ es una base de $\sigma(E',E)$. Pues bien, dado $\epsilon = \min\limits_{1\le i\le k}\{\epsilon_i - |f_i(x_i) - g(x_i)|\}$, consideremos

$$B = U_{x_1,...,x_k}(g;\epsilon) \in \beta_{E'}.$$

Es evidente que $g \in B$. Ahora, dado $h \in B$, solo resta ver que $h \in V$. Para ello, se tiene para todo $i \in \{1, ..., k\}$ que

$$\begin{aligned} |f_i(x_i) - h(x_i)| &= |f_i(x_i) - g(x_i) + g(x_i) - h(x_i)| \\ &\leq |f_i(x_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - h(x_i)| \\ &< |f_i(x_i) - g(x_i)| + \epsilon \\ &\leq |f_i(x_i) - g(x_i)| + \epsilon_i - |f_i(x_i) - g(x_i)| = \epsilon_i. \end{aligned}$$

Por tanto, $h \in V = U_{x_1,...,x_k}(f_1, ..., f_k; \epsilon_1, ..., \epsilon_k)$ y, en definitiva, $B \subset V$. En resumen, hemos encontrado $B \in \beta_{E'}$ tal que $g \in B \subset V$. Con ello, $\beta_{E'}$ es una base. $\square$

Nota 3.2.4. *Sea E un espacio normado, E' su espacio dual e $Y \subset E'$. Se tiene que una base de $\sigma(E', E)_Y$ es justamente*

$$\beta_Y = \{Y \cap U_{x_1,...,x_k}(g; \epsilon) : k \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_k \in E, g \in Y, \epsilon > 0\}.$$

Su prueba es análoga a la dada en la proposición anterior (teniendo en cuenta que una base natural de $\sigma(E', E)_Y$ es $\{Y \cap U_{x_1,...,x_k}(g; \epsilon) : k \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_k \in E, g \in E', \epsilon > 0\}$).

El hecho de haber definido la topología débil-* partiendo de una dualidad (concretamente, la dualidad canónica; ver definición 3.2.3), nos garantiza, gracias a la condición 6 de la definición 3.2.1, que $\sigma(E', E)$ es Hausdorff (de modo análogo, y aunque no sea objeto de estudio, la condición 5 de la definición de dualidad permite a la topología débil $\sigma(E, E')$ ser Hausdorff). Veamos que así ocurre a partir del siguiente resultado:

Proposición 3.2.2. *Sea E un espacio normado. Se tiene que E' es débil-* Hausdorff.*

Demostración. Dados $g, h \in E'$ funcionales lineales continuos distintos, tenemos que encontrar V_g, V_h abiertos disjuntos en $\sigma(E', E)$ tales que $g \in V_g$ y $h \in V_h$. Pues bien, sabemos por el teorema 3.2.1 (y, concretamente, gracias a la condición 6 de la definición de dualidad), que la aplicación $f \mapsto B^f$ es inyectiva. Por lo tanto, se sigue que $B^g \neq B^h$. Con ello, existe $x_0 \in E$ tal que $B^g(x_0) \neq B^h(x_0)$ (o, lo que es lo mismo, $g(x_0) \neq h(x_0)$). Ahora, como $\mathbb{C}$ es Hausdorff, existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $B(g(x_0); \epsilon) \cap B(h(x_0); \epsilon) = \emptyset$. Asimismo, se tiene, a raíz del carácter continuo de B_{x_0}, que tanto la contraimagen

$$\begin{aligned} V_g &:= B_{x_0}^{-1}(B(g(x_0); \epsilon)) \\ &= \{f \in E' : f(x_0) \in B(g(x_0); \epsilon)\} \\ &= \{f \in E' : |f(x_0) - g(x_0)| < \epsilon\} \\ &= U_{x_0}(g; \epsilon), \end{aligned}$$

como la contraimagen $V_h := B_{x_0}^{-1}(B(h(x_0); \epsilon)) = U_{x_0}(h; \epsilon)$ son abiertas y disjuntas (si supusiéramos, en caso contrario, que existe $f \in V_g \cap V_h$, entonces se tendría que $f(x_0) \in B(g(x_0); \epsilon) \cap B(h(x_0); \epsilon) = \emptyset$, lo que es absurdo). En definitiva, hemos encontrado dos abiertos disjuntos V_g y V_h en $\sigma(E', E)$ que contienen respectivamente a g y h, luego E' dotado de la topología débil-*, $\sigma(E', E)$, es Hausdorff. $\square$

Una vez visto cómo se construye la topología débil-*, a continuación vamos a introducir el teorema de Banach-Alaoglu. En dicho teorema queremos ver que el conjunto $\mathscr{B}$ consistente en los $f \in E'$ tales que $\|f\| \leq 1$ es débil-* compacto. Pues bien, para probarlo buscaremos un homeomorfismo entre dicho conjunto $\mathscr{B}$ y otro conjunto C compacto en otra topología. Recordemos previamente cómo se define la topología de Tychonoff en cualquier producto de espacios topológicos, como también el enunciado del teorema de Tychonoff:

Nota 3.2.5. *Sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ una colección de conjuntos cualesquiera. El producto cartesiano Y de los conjuntos Y_i es el conjunto siguiente:*

$$Y := \prod_{i\in I} Y_i = \{y : I \to \bigcup_{i\in I} Y_i : y(i) \in Y_i \text{ para todo } i \in I\}$$

(el valor $y(i)$, denotado también por y_i, es la coordenada i-ésima de la aplicación $y \in Y$).
El axioma de elección nos garantiza que, para una colección no vacía de conjuntos no vacíos cualesquiera, se tenga que el producto cartesiano sea no vacío.
*También, dado $j \in I$ podemos definir una aplicación $\pi_j \colon Y \to Y_j$ tal que $\pi_j(y) := y_j$, esto es, π_j es la **proyección j-ésima** de Y en Y_j.*
*Ahora, si tenemos una colección de espacios topológicos $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$, se tiene que la **topología de Tychonoff** o **topología producto** es aquella topología sobre $X = \prod_{i\in I} X_i$ que tiene como subbase a la familia siguiente:*

$$\bigcup_{i\in I} \{\pi_i^{-1}(U_i) : U_i \text{ es abierto en } X_i\}$$

*Dicha topología hace continua a π_j para todo $j \in I$ (de hecho, es la más gruesa con dicha propiedad). Además, se satisface, por un lado, que el producto de espacios Hausdorff con la topología producto es Hausdorff y, por otro lado y a partir del **teorema de Tychonoff**, que el producto de espacios compactos con la topología producto es compacto.*

Teorema 3.2.2. *(Teorema de Banach-Alaoglu) Sea E un espacio normado. Se tiene que la bola unidad cerrada en E' es débil-* compacta, es decir, el conjunto*

$$\mathscr{B} := \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$$

es compacto para la topología $\sigma(E', E)$ (siendo $\|f\|$ interpretado como la norma de un funcional lineal).

Demostración. La estrategia a seguir para probar que $\mathscr{B}$ es débil-* compacto se resume en encontrar, por el siguiente orden, un conjunto D compacto con la topología de Tychonoff, luego un subconjunto $C \subset D$ cerrado (y, por tanto, compacto) y, finalmente, una aplicación κ que defina un homeomorfismo entre $\mathscr{B}$ y C. Una vez hallado esto, concluiremos que $\mathscr{B}$ es débil-* compacto.

Veamos, en primer lugar, cuál es el conjunto compacto D. Para ello, definamos previamente el conjunto siguiente para todo $x \in E$:

$$D_x := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}.$$

Es evidente que D_x es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ para todo $x \in E$. Además, se satisface que, si $f \in \mathscr{B}$, entonces $f(x) \in D_x$ para todo $x \in E$. Veámoslo:
si $x = 0_E$, entonces es inmediato que $|f(x)| = \|x\| = 0_{\mathbb{C}}$ y, por tanto, que $f(x) \in D_x = \{0_{\mathbb{C}}\}$.
Sea ahora $x \in E \backslash \{0_E\}$. Se tiene que, como $f \in \mathscr{B}$, se cumple que

$$\|f\| = \sup_{x\in E\setminus\{0_E\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 1,$$

es decir, se tiene que $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 1$ para todo $x \in E\setminus\{0_E\}$ y, en definitiva, que $|f(x)| \leq \|x\|$ para cada $x \in E\setminus\{0_E\}$. Por consiguiente, $f(x) \in D_x$ para todo $x \in E\setminus\{0_E\}$.

Una vez presentado el conjunto D_x, vamos, a continuación, a dotar a D_x de la topología de subespacio inducida por τ_u y construiremos, por un lado, el conjunto

$$D := \prod\nolimits_{x\in E} D_x$$

y, por otro lado y para todo $x \in E$, la aplicación proyección x-ésima de D sobre D_x

$$\begin{aligned}\pi_x \colon D &\to D_x\\ y &\to y_x\end{aligned}$$

(siendo y una aplicación $y : E \to D$ tal que $y(x) \in D_x$ ($y_x \in D_x$) para todo $x \in E$, es decir, y es un elemento del producto cartesiano D; ver nota 3.2.5).
Pues bien, si en D consideramos la topología de Tychonoff, es decir, la topología generada por la subbase

$$\bigcup_{x\in E}\{\pi_x^{-1}(U_x) : U_x \text{ es abierto en } D_x\} = \bigcup_{x\in E}\{\pi_x^{-1}(V\cap D_x) : V \text{ es abierto en } \tau_u\},$$

entonces concluimos, en primera instancia, que π_x es continua para todo $x \in E$ y, en segunda instancia y aplicando el teorema de Tychonoff, que D es un conjunto compacto.

Una vez identificado el conjunto compacto D con la topología de Tychonoff, nos disponemos, en segundo lugar, a buscar $C \subset D$ cerrado. Consideremos pues el siguiente conjunto:

$$C := \{y \in D : y_{x+x'} = y_x + y_x,\ \ y_{\mu w} = \mu y_w, \text{ para todo } x, x', w \in E, \mu \in \mathbb{C}\}$$

Para probar que dicho conjunto es cerrado, vamos a apoyarnos en las aplicaciones $\psi : D \to \mathbb{C}$ y $\psi' : D \to \mathbb{C}$ definidas, dados $x, x', w \in E$, $\mu \in \mathbb{C}$ fijos, respectivamente como

$$\psi(y) := y_{x+x'} - y_x - y_{x'}$$

y como

$$\psi'(y) := \mu y_w - y_{\mu w}$$

para todo $y \in E$. Pues bien, a continuación probaremos que ψ y ψ' son continuas y que C se puede expresar en función de intersecciones de cerrados de la forma $\psi^{-1}(\{0_\mathbb{C}\})$ y $\psi'^{-1}(\{0_\mathbb{C}\})$. Veámoslo:
Las aplicaciones ψ y ψ' se pueden reescribir como $\psi(y) = \pi_{x+x'}(y) - \pi_x(y) - \pi_{x'}(y)$ y como $\psi'(y) = \mu\pi_w(y) - \pi_{\mu w}(y)$ para todo $y \in D$, es decir, ψ y ψ' se expresan como suma de funciones continuas y, por tanto, son también continuas. Con ello, se sigue que tanto el conjunto

$$C_{x,x'} := \psi^{-1}(\{0_\mathbb{C}\}) = \{y \in D : \psi(y) = 0_\mathbb{C}\} = \{y \in D : y_{x+x'} = y_x + y_{x'}\},$$

como el conjunto

$$C_{\mu,w} := \psi'^{-1}(\{0_\mathbb{C}\}) = \{y \in D : \psi'(y) = 0_\mathbb{C}\} = \{y \in D : y_{\mu w} = \mu y_w\}$$

son cerrados. En consecuencia, se tiene que, si hacemos variar $x, x', w \in E$ y $\mu \in \mathbb{C}$, y, con ello, variamos ψ y ψ', se llega a que

$$C = \left(\bigcap_{x,x' \in E} C_{x,x'} \right) \cap \left(\bigcap_{w \in E, \mu \in \mathbb{C}} C_{\mu,w} \right),$$

es decir, C se puede expresar como intersección de cerrados, con lo cual concluimos que C es un conjunto cerrado con la topología de Tychonoff. Además, como D es compacto con la topología de Tychonoff y $C \subset D$, se sigue que C es compacto con la topología de Tychonoff.

Ahora que hemos verificado que el conjunto C es compacto con la topología de Tychonoff, vamos a ver, en tercer y último lugar, que, si dotamos a $\mathscr{B}$ de la topología débil-* de subespacio $\sigma(E', E)_{\mathscr{B}}$, existe un homeomorfismo de $\mathscr{B}$ en C (en realidad, a continuación veremos que $\mathscr{B} = C$. No obstante, el hecho de que se produzca esta igualdad como conjuntos no garantiza en ningún momento que $\mathscr{B}$ sea débil-* compacto).
Definamos la aplicación $T : \mathscr{B} \to D$ dada por $T(f) := f$ para todo $f \in \mathscr{B}$ (esto es factible porque, como vimos con anterioridad, dada $f \in \mathscr{B}$, se tiene que $f(x) \in D_x$ para todo $x \in E$. Por tanto, $f \in D$). Es evidente que T es inyectiva. Si probamos que $T(\mathscr{B}) = C$, es decir, que $\{f : f \in \mathscr{B}\} = C$ (equivalentemente, $\mathscr{B} = C$), entonces podremos concluir que $T(\mathscr{B})$ y C se encuentran en biyección. Veámoslo:
Comprobemos primero que $T(\mathscr{B}) \subset C$. Sea $T(f) = f \in T(\mathscr{B})$. Se tiene, por ser f lineal, que dados $x, x', w \in E$ y $\mu \in \mathbb{C}$ cualesquiera, se cumple que

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$

y también que $f(\mu w) = \mu f(w)$. Por tanto, $T(f) = f \in C$.
Comprobemos ahora que $C \subset T(\mathscr{B})$. Sea $y \in C$ (recordemos que, como $y \in D$, y es una función de la forma $y : E \to \bigcup\limits_{x \in E} D_x \subset \mathbb{C}$ que satisface que $y_x \in D_x$ para todo $x \in E$; ver nota 3.2.5). Basta probar que $y \in \mathscr{B}$ para concluir que $T(y) = y \in T(\mathscr{B})$. Pues bien, se tiene que, como $y \in C$, se cumple que y es una aplicación lineal y continua tal que $\|y\| \leq 1$ (como $y_x \in D_x$ para todo $x \in E$, se satisface que $|y_x| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$, es decir, y está acotada y $\|y\| \leq 1$). En consecuencia, $y \in \mathscr{B}$ y, con ello, se sigue que $T(y) = y \in T(\mathscr{B})$.
Por tanto, acabamos de probar que $T(\mathscr{B}) = \mathscr{B} = C$. Ahora, si consideramos la aplicación biyectiva $\kappa : \mathscr{B} \to C$ dada por $\kappa(f) := T(f) = f$ para cada $f \in \mathscr{B}$, es decir, la aplicación identidad de $\mathscr{B}$ en $\mathscr{B}$, solo resta comprobar que κ es un homeomorfismo. Veámoslo:
Se tiene, por la nota 3.2.4, que, dado $k \in \mathbb{N}$, para todo $x_1, ..., x_k \in E$, $f_0 \in \mathscr{B}$ y $\epsilon > 0$, el conjunto

$$\begin{aligned} V &:= \mathscr{B} \cap U_{x_1,...,x_k}(f_0; \epsilon) \\ &= \mathscr{B} \cap \{f \in E' : |f(x_1) - f_0(x_1)| < \epsilon, ..., |f(x_k) - f_0(x_k)| < \epsilon\} \\ &= \{f \in \mathscr{B} : |f(x_1) - f_0(x_1)| < \epsilon, ..., |f(x_k) - f_0(x_k)| < \epsilon\} \end{aligned}$$

es un elemento cualquiera de la base de $\sigma(E', E)|_{\mathscr{B}}$. Asimismo, se satisface que, como $\mathscr{B} = C$ y κ es la aplicación identidad, el conjunto

$$\begin{aligned} \kappa(V) &= V \\ &= \{f \in C : |f(x_1) - f_0(x_1)| < \epsilon, ..., |f(x_k) - f_0(x_k)| < \epsilon\} \\ &= \{f \in C : |\pi_{x_1}(f) - f_0(x_1)| < \epsilon, ..., |\pi_{x_k}(f) - f_0(x_k)| < \epsilon\} \\ &= C \cap \pi_{x_1}^{-1}(B(f_0(x_1); \epsilon) \cap D_{x_1}) \cap ... \cap \pi_{x_k}^{-1}(B(f_0(x_k); \epsilon) \cap D_{x_k}) \end{aligned}$$

($f_0(x) \in D_x$, para todo $x \in E$) es un abierto en C con la topología de Tychonoff por ser intersección finita de abiertos (pues es la intersección de contraimágenes, por aplicaciones continuas, de bolas abiertas; nótese que π_x es continua para cada $x \in E$). Con ello, se sigue que, como la imagen por κ de cualquier elemento de la base de $\sigma(E', E)|_{\mathscr{B}}$ es abierta, κ es abierto, o, equivalentemente, que κ^{-1} es continua. Ahora, como κ^{-1} es una biyección continua del espacio compacto C en el espacio débil-* Hausdorff $\mathscr{B}$ ($\mathscr{B}$ es un subespacio de E' que es débil-* Hausdorff; véase la proposición 3.2.2), se concluye que κ^{-1}, o, equivalentemente, κ, es un homeomorfismo. En definitiva, $\mathscr{B}$ es débil-* compacto.

$\square$

Nota 3.2.6. *Nótese que, aunque B_x sería continua con respecto a la topología de la norma en E' para todo $x \in E$, en general no podemos sustituir la topología débil-* por la de la norma para comprobar que $\mathscr{B}$ es compacto (la compacidad de $\mathscr{B}$ se usa más adelante para probar que $\mathscr{X}$ es compacto; consúltese el lema 5.1.6). Es cierto que, si E' es un espacio normado de dimensión finita, entonces el conjunto $\mathscr{B}$, que es cerrado y acotado, sería compacto; no obstante, esto no es válido si consideramos un espacio normado de dimensión infinita. Veamos un ejemplo:*
Consideremos el conjunto $L := \{x \in l^\infty : \|x\| \leq 1\}$ en l^∞ (el dual del espacio normado $E = l^1$ es justamente $E' = l^\infty$). Es evidente que dicho conjunto es cerrado y acotado. Ahora, consideremos la sucesión $(e_n)_n$ en l^∞ dada por $e_n := (0, 0, \overset{n)}{\ldots}, 1, 0, ...)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (es inmediato que $(e_n)_n$ es una sucesión en L porque $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Se tiene, dados n, m naturales distintos, que $\|e_n - e_m\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |(e_n - e_m)_k| = 1$. Con ello, se deduce que ni $(e_n)_n$, ni ninguna subsucesión suya es de Cauchy. Como l^∞ es completo, esto anterior es equivalente a decir que ninguna subsucesión de $(e_n)_n$ es convergente. Por tanto, se tiene que, al haber encontrar una sucesión en L que no posee ninguna subsucesión convergente, L no es compacto.

Capítulo 4

Álgebras de Banach con unidad

4.1. Concepto de álgebra

Cuando se construye una topología en un conjunto dotado de una estructura algebraica, es interesante, según en qué contexto, que la estructura topológica satisfaga ciertas condiciones con respecto a las operaciones algebraicas. A continuación veremos que, dado un espacio normado cualquiera, es posible ampliar su estructura algebraica a la de un anillo estableciendo otra operación binaria nueva denominada producto. Esto último dará pie a la definición de álgebra normada, concepto en torno al cual girará la teoría de este capítulo. Para el desarrollo de este sección se ha seguido el contenido expuesto en [2].

Definición 4.1.1. *Un **álgebra**, denotado usualmente por A, es un par $(A, \cdot)$ formado por un espacio vectorial A en el que se define una operación producto que es interna y con respecto a la cual se satisface dados $x, y, z \in A, \lambda \in \mathbb{C}$ cualesquiera:*

1. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
2. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;\;\; (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.
3. $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

*Si además se cumple que A es un espacio normado tal que $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ para todo $x, y \in A$, se dice que A es un **álgebra normada**. Si se considera también que A es de Banach, entonces A es un **álgebra de Banach**.*

Nota 4.1.1. *Un álgebra es, por tanto, un anillo (no necesariamente dotado de unidad ni conmutativo) junto con una operación producto por escalar que satisface:*

1. *Dicho anillo, con la suma y producto por escalar, es espacio vectorial.*
2. $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y para todo* x, y *elementos del anillo.*

Nota 4.1.2. *De la definición de álgebra normada se deduce que $\|x^k\| \leq \|x\|^k$ para cada $x \in A, k \in \mathbb{N}$.*

Nota 4.1.3. *La unidad o elementro neutro de un álgebra A (en caso de existir) es un elemento de A, denotado por 1_A, que satisface que $1_A \cdot x = x \cdot 1_A$ para cada $x \in A$. Además, dicha unidad cumple que $\lambda 1_A \cdot x = \lambda(1_A \cdot x) = \lambda x$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}, x \in A$. Para verlo basta aplicar la condición 3 de la definición de álgebra.*
También, denotaremos por $U(A)$ al conjunto de unidades de A (es decir, aquellos $x \in A$ tales que existe $y \in A$ con $yx = xy = 1_A$). El conjunto complementario, $A \backslash U(A)$, es el conjunto de elementos singulares de A.

Definición 4.1.2. *Sea A un álgebra. Se dice que A es un* ***álgebra de división*** *cuando $U(A) = A\backslash\{0_A\}$.*

El resultado que a continuación se enuncia nos permite, no solo introducir un primer ejemplo de álgebra normada, sino también llevar a cabo la prueba de la proposición 4.1.2:

Proposición 4.1.1. *Sea E un espacio normado. Si en el espacio normado $\mathscr{L}(E,E)$ (consultar la nota 2.1.4) consideramos como operación producto la composición de operadores puntual, es decir, dados $S,T \in \mathscr{L}(E,E)$, $(S\cdot T)(x) := S(T(x))$ para todo $x \in E$, entonces $\mathscr{L}(E,E)$ es un álgebra normada.*

Demostración. Sean $S,T,Q \in \mathscr{L}(E,E)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos que, efectivamente, $\mathscr{L}(E,E)$ es un álgebra normada:
Se tiene, por ser S y T continuas, que existen $k_1, k_2 > 0$ con

$$\|(S\cdot T)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq k_1\|T(x)\| \leq k_1 \cdot k_2\|x\|$$

para todo $x \in E$. Por tanto, $S\cdot T$ es continua. Además, como $S\cdot T$ es lineal, se sigue que $S\cdot T \in \mathscr{L}(E,E)$ y, en definitiva, que la operación producto está bien definida; se prueba fácilmente que $S\cdot(T\cdot Q) = (S\cdot T)\cdot Q$, que $S\cdot(T+Q) = S\cdot T + S\cdot Q$, que $(T+Q)\cdot S = T\cdot S + Q\cdot S$ y que $\lambda(S\cdot T) = (\lambda S)\cdot T = S\cdot(\lambda T)$; ahora, como por definición $\sup\limits_{y\neq 0_E} \frac{\|S(y)\|}{\|y\|} = \|S\|$, se tiene que si $x \in E$ es tal que $y = T(x) \neq 0_E$, entonces

$$\frac{\|S(T(x))\|}{\|T(x)\|} \leq \|S\|.$$

Con ello, se sigue que $\|(S\cdot T)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\|\|T(x)\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|$ para todo $x \in E\backslash\{0_E\}$ tal que $T(x) \neq 0_E$. No obstante, esta cadena de desigualdades última es, a su vez, válida para todo $x \in E\backslash\{0_E\}$ tal que $T(x) = 0$. Por tanto, se concluye que, para cada $x \in E\backslash\{0_E\}$,

$$\frac{\|(S\cdot T)(x)\|}{\|x\|} \leq \|S\|\|T\|,$$

es decir, $\|S\cdot T\| \leq \|S\|\cdot\|T\|$. Con esto, probamos que $\mathscr{L}(E,E)$ es un álgebra normada. □

Nota 4.1.4. *Nótese que, para construir un álgebra normada con unidad A, no es válido dotar a A de cualquier norma, ya que, por definición, ha de satisfacerse para todo $x,y \in A$ que $\|x\cdot y\| \leq \|x\|\cdot\|y\|$. Particularmente, si suponemos que A es un álgebra normada tal que $\|1_A\| < 1$, entonces se tendría que $\|1_A \cdot 1_A\| = \|1_A\| \leq \|1_A\|\cdot\|1_A\|$. Sin embargo, esto anterior no tiene sentido porque, como $\|1_A\| < 1$, tiene que darse $\|1_A\|\cdot\|1_A\| < \|1_A\|$. Por lo tanto, no existe ningún álgebra normada cuya unidad tenga norma inferior a* 1.

De la nota anterior concluimos que únicamente tiene sentido hablar de álgebras normadas cuya unidad tenga norma mayor o igual que 1. Denotaremos por $|||\cdot|||$ a una norma en A tal que la unidad tenga norma mayor estricto que 1 (véase el ejemplo 4.2.6) y por $\|\cdot\|$ a una norma en A donde la unidad tenga norma igual a 1. Con dicha notación tenemos, a partir del siguiente resultado, que si $(A, |||\cdot|||)$ es un álgebra normada tal que $|||1_A||| > 1$, entonces podemos encontrar una norma equivalente $\|\cdot\|$ en A tal que $\|1_A\| = 1$:

Proposición 4.1.2. *Si* $(A, |||\cdot|||))$ *es un álgebra normada con unidad tal que* $|||1_A||| > 1$, *entonces existe una norma equivalente* $\|\cdot\|$ *en* A *con la que* A *es también un álgebra normada y tal que* $\|1_A\| = 1$.

Demostración. Definamos, en primer lugar, la aplicación siguiente para todo $x \in A$:

$$\begin{aligned} L_x \colon A &\to A \\ y &\to L_x(y) := xy. \end{aligned}$$

Fijemos $x \in A$. Se tiene que L_x es lineal. También, se satisface, para todo $y \in A$, que $|||L_x(y)||| = |||xy||| \leq |||x||| |||y|||$. Con ello, L_x es continua y cumple que

$$\|L_x\| = \sup_{y \neq 0_E} \frac{|||L_x(y)|||}{|||y|||} \leq |||x|||. \qquad (1)$$

Por tanto, $L_x \in \mathscr{L}(A, A)$. Definamos ahora para cada $x \in A$ la norma en A

$$\|x\| := \|L_x\| (= \sup_{y \neq 0_A} \tfrac{|||L_x(y)|||}{|||y|||}).$$

Es inmediato verificar que, al ser $\mathscr{L}(A, A)$ un espacio normado (véase la nota 2.1.4), se tiene, dados $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, que $\|x\| \geq 0$, que $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ y que si $x = 0_E$, entonces $L_x = 0_{\mathscr{L}(A,A)}$ y, en definitiva, que $\|x\| = \|0_{\mathscr{L}(A,A)}\| = 0_{\mathbb{R}}$. No obstante, no es evidente probar que si $\|x\| = 0_{\mathbb{R}}$, entonces $x = 0_E$. Aun con todo, si supusiéramos que $\|x\| = 0_{\mathbb{R}} = \|L_x\|$ y que $x \neq 0_E$ llegaríamos a una contradicción, ya que, por un lado, se tendría que $L_x = 0_{\mathscr{L}(A,A)}$, y, por otro lado, que la aplicación lineal $x \mapsto L_x$ de A en $\mathscr{L}(A, A)$ es una aplicación inyectiva (si $L_x = L_{x'}$, entonces se tiene que $L_x(1_A) = L_{x'}(1_A)$ y, en definitiva, que $x = x'$). Por consiguiente, queda probado que $\|\cdot\|$ define una norma. Veamos ahora que $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes:
Por un lado, ya hemos visto en (1) que $\|L_x\| \leq |||x|||$, es decir, que $\|x\| \leq |||x|||$; por otro lado, tenemos que, dado $x \in A$, se satisface que

$$\|x\| = \|L_x\| = \sup_{y \neq 0_A} \frac{|||L_x(y)|||}{|||y|||} = \sup_{y \neq 0_A} \frac{|||x \cdot y|||}{|||y|||} \geq \frac{\left|\left|\left| x \cdot \frac{1_A}{|||1_A|||} \right|\right|\right|}{\left|\left|\left| \frac{1_A}{|||1_A|||} \right|\right|\right|} = \frac{\frac{|||x|||}{|||1_A|||}}{\frac{|||1_A|||}{|||1_A|||}} = \frac{|||x|||}{|||1_A|||}.$$

Con esto, llegamos a que

$$\tfrac{1}{|||1_A|||} \cdot |||x||| \leq \|x\| \leq |||x|||$$

y, en definitiva, que $\|x\|$ y $|||x|||$ son normas equivalentes.

Veamos ahora que $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada con unidad de norma igual a 1:
en primera instancia, se satisface que

$$\|1_A\| = \|L_{1_A}\| = \sup_{y \neq 0_A} \frac{|||1_A \cdot y|||}{|||y|||} = 1$$

y, en segunda instancia y dados $x, x' \in A$, que, como $L_{xx'}(y) = xx'y = L_x(L_{x'}(y)) = (L_x \cdot L_{x'})(y)$ para cada $y \in A$; $\mathscr{L}(A, A)$ es un álgebra normada (véase la proposición 4.1.1). Se sigue que

$$\|xx'\| = \|L_{xx'}\| = \|L_x L_{x'}\| \leq \|L_x\| \|L_{x'}\| = \|x\| \|x'\|$$

$\square$

Nota 4.1.5. *Nótese que, dadas dos normas equivalentes sobre un espacio vectorial, dichas normas generan los mismos abiertos, es decir, generan la misma topología. Es por ello que, aplicando la proposición 4.1.2, podemos interpretar, sin pérdida de generalidad, cualquier álgebra normada con unidad A como un álgebra normada con unidad de norma igual a* 1.

Definición 4.1.3. *Una **subálgebra** de A es un subespacio vectorial de A cuya operación producto es interna.*

Definición 4.1.4. *Sean A_1, A_2 álgebras. Decimos que $f : A_1 \to A_2$ es un homomorfismo de álgebras si f es un homomorfismo de anillos que satisface que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}, x \in A_1$.*

Nota 4.1.6. *Todo homomorfismo de álgebras es un operador lineal de álgebras. Sin embargo, no todo operador lineal de álgebras es un homomorfismo de álgebras. Para que un operador lineal de álgebras $f : A_1 \to A_2$ sea homomorfismo de álgebras tiene que satisfacer que $f(1_{A_1}) = 1_{A_2}$ y que $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in A_1$.*
Asimismo, se tiene que todo isomorfismo isométrico de álgebras normadas es también un homeomorfismo.

4.2. Ejemplos

Ejemplo 4.2.1. *El cuerpo $\mathbb{C}$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad de norma igual a* 1.

Ejemplo 4.2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico compacto. Si consideremos el espacio vectorial de funciones continuas*

$$C(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es continua}\}$$

junto con la norma $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ para todo $f \in C(X)$, denominada norma supremo, y las operaciones $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$, $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$, para cada $f, g \in C(X), \lambda \in \mathbb{C}$, entonces $C(X)$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad $1_{C(X)} \equiv 1_{\mathbb{C}}$ de norma igual a 1. El neutro para la suma es $0_{C(X)} \equiv 0_{\mathbb{C}}$. Es evidente que $C(X)$ es un álgebra conmutativa (sus elementos son funciones que toman valores en $\mathbb{C}$). Asimismo, la compacidad en X permite que cualquier aplicación continua $f \in C(X)$ sea acotada, con lo cual tiene sentido hablar de la norma supremo de f. Veamos ahora que $C(X)$ es un álgebra de Banach:
Sean $f, g \in C(X)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\| &= \sup_{x \in X} |f(x) \cdot g(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |f(x)| \cdot |g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x)| \cdot \sup_{x \in X} |g(x)| \\ &= \|f\| \cdot \|g\|, \end{aligned}$$

luego $C(X)$ es un álgebra normada; veamos ahora que $C(X)$ es completo. Para ello, consideremos una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en $C(X)$ y veamos que existe $f \in C(X)$ tal que $f_n \to f$. Pues bien, fijemos $\epsilon > 0$. Como $(f_n)_n$ es de Cauchy, existe $N_{\frac{\epsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } n, m \geq N_{\frac{\epsilon}{2}},$$

y, en concreto, se tiene, dado $x \in X$, que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } n, m \geq N_{\frac{\epsilon}{2}}.$$

Fijémonos ahora en la expresión anterior. Es evidente que $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ y, por tanto, converge a un límite que llamamos $l_x \in \mathbb{C}$.
Asimismo, se tiene, aplicando la proposición 2.1.2, que para todo $n, m \in \mathbb{N}$

$$\big|\, |f_n(x) - f_m(x)| - |f_n(x) - l_x| \,\big| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x) - l_x)| = |f_m(x) - l_x|. \quad (0)$$

Ahora, si consideramos un $n \in \mathbb{N}$ cualquiera y hacemos tender m a ∞ para dicho n se tiene, aplicando (0), que, como $|f_m(x) - l_x| \to 0$, se sigue que $\big|\, |f_n(x) - f_m(x)| - |f_n(x) - l_x| \,\big| \to 0$, es decir, que $\lim_m |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - l_x|$. Además, dado $n \geq N_{\frac{\epsilon}{2}}$, se tiene que

$$|f_n(x) - l_x| = \lim_m |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad (1)$$

(la desigualdad se da gracias a que, dado $n \geq N_{\frac{\epsilon}{2}}$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $m \geq N_{\frac{\epsilon}{2}}$).
Como, lo anterior es válido para cualesquiera $x \in X$ y $n \geq N_{\frac{\epsilon}{2}}$ que escojamos, se sigue que

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - l_x| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ para todo } n \geq N_{\frac{\epsilon}{2}}.$$

Por tanto, para el $\epsilon > 0$ inicial hemos encontrado $N_{\frac{\epsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ tal que, si definimos f como $f(x) := l_x$ para todo $x \in X$, entonces

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ para todo } n \geq N_{\frac{\epsilon}{2}}. \quad (2)$$

(todavía no es válido escribir $\|f_n - f\| = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$ porque no sabemos si f es continua y, en definitiva, si $f_n - f$ es continua. Por tanto, aún no podemos hablar de convergencia de f_n a f). Ahora, probaremos que f es continua en cada punto. Fijemos pues $x_0 \in X, \epsilon > 0$ y veamos que $f \in C(X)$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\frac{\epsilon}{4} > 0$, existe $N_{\frac{\epsilon}{4}} \in \mathbb{N}$ tal que, procediendo de modo análogo a lo descrito en (1), se tiene que

$$|f_n(x) - l_x| = |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{4} \text{ para todo } x \in X, n \geq N_{\frac{\epsilon}{4}}. \quad (3)$$

Además, como $f_{N_{\frac{\epsilon}{4}}}$ es continua, existe un entorno de x_0, $U_{x_0,\frac{\epsilon}{4}} \subset X$, tal que

$$|f_{N_{\frac{\epsilon}{4}}}(x_0) - f_{N_{\frac{\epsilon}{4}}}(y)| < \frac{\epsilon}{4}, \text{ para todo } y \in U_{x_0,\frac{\epsilon}{4}}. \quad (4)$$

Ahora, para todo $y \in U_{x_0,\frac{\epsilon}{4}}$ se tiene, considerando $n = N_{\frac{\epsilon}{4}}$, $l_{x_0} = f(x_0)$ y $l_y = f(y)$ en (3); junto con lo obtenido en (4), que

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x_0)| &= |f(y) - f_{N_{\frac{\epsilon}{4}}}(y) + f_{N_{\frac{\epsilon}{4}}}(y) - f_{N_{\frac{\epsilon}{4}}}(x_0) + f_{N_{\frac{\epsilon}{4}}}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(y) - f_{N_{\frac{\epsilon}{4}}}(y)| + |f_{N_{\frac{\epsilon}{4}}}(y) - f_{N_{\frac{\epsilon}{4}}}(x_0)| + |f_{N_{\frac{\epsilon}{4}}}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon. \end{aligned}$$

Con ello, se prueba que f es continua en x_0 y, en definitiva, en todo su dominio, esto es, $f \in C(X)$. En consecuencia, $f_n - f$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$ y, a partir de (2), se llega a que $\|f_n - f\| = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $n \geq N_{\frac{\epsilon}{2}}$, es decir, para el ϵ inicial hemos encontrado $N_{\frac{\epsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ tal que se satisface la definición de límite. Por tanto, $\|f_n - f\| \to 0$ ó, lo que es lo mismo, $f_n \to f$.
En conclusión, toda sucesión de Cauchy en $C(X)$ converge a una aplicación continua y, por tanto, $C(X)$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 4.2.3. *Consideremos el conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ dotado de τ_{disc}, la topología discreta. Se tiene que X es un espacio topológico compacto y Hausdorff y $C(X)$, junto con la norma y operaciones del ejemplo anterior, es un álgebra de Banach conmutativa de dimensión k con unidad de norma igual a 1, siendo $\{\chi_{\{x_1\}}, \chi_{\{x_2\}}, ..., \chi_{\{x_k\}}\}$ una base de $C(X)$. De hecho, $C(X)$ está formado por todas las funciones de X en $\mathbb{C}$, ya que cualquier aplicación es continua al ser la topología de origen de tipo discreto.*
Se deduce que el conjunto de unidades de $C(X)$ es $U(C(X)) = \{f \in C(X) : 0_{\mathbb{C}} \notin Im(f)\}$. La inclusión de izquierda a derecha se tiene porque si $f \in U(C(X))$ es tal que $0_{\mathbb{C}} \in Im(f)$, entonces no existe $g \in C(X)$ tal que $f \cdot g = 1_{C(X)}$. Para probar la otra inclusión y dado $f \in C(X)$ tal que $0_{\mathbb{C}} \notin Im(f)$, basta tomar como inverso a $f^{-1}(x) := \frac{1}{f(x)}$ para cada $x \in X$. Sean ahora I un ideal de $C(X)$ y $f \in I$. Si $f \in U(C(X))$, es evidente que $I = C(X)$. Si en cambio $0 \in Im(f)$, es decir, $f \notin U(C(X))$, entonces hay $2^k - 1 = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}$ ideales propios posibles, tantos como subconjuntos propios Y de X y en cuyos complementarios $X \backslash Y$ las funciones del respectivo ideal toman valores nulos. Además, hay k ideales maximales, siendo el ideal maximal i-ésimo el espacio formado por todas las funciones continuas que se anulan obligatoriamente en x_i pero que no se anulan en los demás elementos de X.

Ejemplo 4.2.4. *Consideremos el conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ dotado de la topología discreta, siendo $k = m \cdot m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Pues bien, $C(X)$ puede verse como un álgebra de Banach* ***no conmutativa*** *con unidad de norma igual a 1. Basta considerar como norma y operación suma las introducidas en el ejemplo 4.2.2 (y, por ende, la completitud se prueba de modo análogo que en dicho ejemplo) y como operación producto la multiplicación matricial, sin más que interpretar $f \in C(X)$ del siguiente modo:*

$$\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_m) \\ f(x_{m+1}) & f(x_{m+2}) & \cdots & f(x_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_{(m-1)m+1}) & f(x_{(m-1)m+2}) & \cdots & f(x_k) \end{pmatrix}$$

En este caso, la unidad de $C(X)$ coincide con la matriz identidad. Y con esto se tiene que, $C(X)$, dotado del producto matricial, es isométricamente isomorfo como álgebra a $\mathbb{C}^{m,m}$ con la norma $\|A\|_1 := \max\limits_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ para cada $A \in \mathbb{C}^{m,m}$.

Ejemplo 4.2.5. *En analogía con el ejemplo 4.2.4, podemos interpretar $\mathbb{C}^{m,m}$ como el espacio de funciones continuas $C(X)$ dotado de las operaciones puntuales de funciones, siendo el espacio $X = \{x_1, x_2, ..., x_{m \cdot m}\}$ un espacio topológico discreto. En este caso, $\mathbb{C}^{m,m}$ es un álgebra de Banach conmutativa cuya unidad para el producto es la matriz de unos y tiene norma igual a 1.*

Ejemplo 4.2.6. *Sea el álgebra $\mathbb{C}$ y fijemos $k \in \mathbb{R}$ con $k > 1$. Si en $\mathbb{C}$ definimos la norma dada por $|||x||| := k \cdot |x|$, para todo $x \in \mathbb{C}$, entonces $\mathbb{C}$ es un álgebra normada* ***con unidad de norma mayor que 1*** *(puesto que $|||1_{\mathbb{C}}||| = k \cdot |1_{\mathbb{C}}| = k > 1$). Veamos que se satisface la definición de álgebra normada:*
es evidente que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$; ahora, como $|x| > 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$, entonces $|||x||| > 0$; si $x = 0$, es inmediato que $|||x||| = 0$. Ahora, si $|||x||| = 0$, entonces $k \cdot |x| = 0$, y, como $k > 1$, solo puede ser $x = 0$; dados $\alpha \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}$, se tiene que $|||\alpha x||| = k \cdot |\alpha x| = k \cdot |\alpha| \cdot |x| = |\alpha| \cdot k \cdot |x| = |\alpha| \cdot |||x|||$; sean $x, y \in \mathbb{C}$. Se satisface que $|||x + y||| = k \cdot |x + y| \le k(|x| + |y|) = k|x| + k|y| = |||x||| + |||y|||$, y también se tiene que $|||xy||| = k \cdot |xy| = k|x||y| \le k^2|x||y| = |||x||| \cdot |||y|||$.

Ejemplo 4.2.7. *Sea el disco unidad abierto en $\mathbb{C}$, $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Si consideramos el conjunto*

$$A(\overline{D_1}) := \{f : \overline{D_1} \to \mathbb{C} : f \text{ es continua en } \overline{D_1} \text{ y holomorfa en } D_1\},$$

entonces es posible hablar de la norma supremo, ya que toda función está acotada por ser continua y estar definida en un compacto. Con ello, $A(\overline{D_1})$ junto con la norma

$$\|f\| := \sup\{|f(z)| : z \in \overline{D_1}\} (= \sup\{|f(z)| : |z| = 1\})$$

y las operaciones del ejemplo 4.2.2, es un álgebra de Banach con unidad de norma igual a 1. A esta álgebra, que es a su vez subálgebra de $C(\overline{D_1})$, la conocemos como ***álgebra del disco****. Comprobemos que lo descrito acerca de la naturaleza de $A(\overline{D_1})$ se cumple:*

es evidente que $A(\overline{D_1}) \subset C(\overline{D_1})$ y que $A(\overline{D_1})$ es un álgebra conmutativa, puesto que sus elementos son funciones que toman valores en $\mathbb{C}$. Con esto, y como el producto de funciones holomorfas es una función holomorfa, es inmediato que $A(\overline{D_1})$ es una subálgebra de $C(\overline{D_1})$. Además, a partir de dicha inclusión, se deduce que $A(\overline{D_1})$ es un álgebra normada.
Veamos a continuación que $A(\overline{D_1})$ es completo. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $A(\overline{D_1})$. Se tiene que, como $C(\overline{D_1})$ es un espacio completo y $A(\overline{D_1}) \subset C(\overline{D_1})$, existe $f : \overline{D_1} :\to \mathbb{C}$ continua de tal manera que $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$. Con ello, si demostramos que f es holomorfa en D_1, entonces tendremos que $f \in A(\overline{D_1})$ y, por tanto, que $A(\overline{D_1})$ es completo. Pues bien, se tiene, atendiendo al teorema de Morera, que la aplicación f, que es continua en el abierto D_1, es holomorfa en D_1 si se cumple que, dado un triangulo cualquiera contenido en D_1 con frontera γ, se tiene que $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Comprobemos que se puede aplicar dicho resultado. Sea γ la frontera de un triangulo contenido en D_1. Se tiene, por un lado, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$|\int_\gamma f_n dz - \int_\gamma f dz| = |\int_\gamma (f_n - f)dz| \leq \sup_{z\in\gamma} |f_n(z) - f(z)| \cdot long(\gamma) \leq \|f_n - f\| \cdot long(\gamma).$$

Por otro lado, como f_n es holomorfa en D_1 para todo $n \in \mathbb{N}$, aplicando el teorema de Cauchy para la integración se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$\int_\gamma f_n dz = 0.$$

Lo anterior nos lleva a que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|0 - \int_\gamma f dz| = |\int_\gamma f dz| \leq \|f_n - f\| \cdot long(\gamma)$$

y, como por hipótesis se satisface que $f_n \to f$, se sigue que $\|f_n - f\| \to 0$ y, en definitiva, que $|\int_\gamma f dz| = 0$. Así, llegamos a que $\int_\gamma f dz = 0$ y, por tanto, que f es holomorfa en D_1.

Ejemplo 4.2.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si consideramos el espacio vectorial*

$$C_b(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es continua y acotada}\}$$

junto con la norma y operaciones del ejemplo 4.2.2, entonces $C_b(x)$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad de norma igual a 1 (para probar la completitud basta proceder de modo similar a la prueba dada en el ejemplo 4.2.2). Además, si X es compacto, $C_b(X) = C(X)$. Un caso particular de esta álgebra se da cuando $X = \mathbb{N}$ y $\tau = \tau_{disc}$. Así, se tiene que toda función (sucesión) definida en $\mathbb{N}$ que tome valores complejos es continua y, por tanto, $C_b(\mathbb{N})$ coincide con l^∞, esto es, el espacio formado por todas las sucesiones en $\mathbb{C}$ acotadas:

$$l^\infty = C_b(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión acotada}\}.$$

Así, si consideramos la norma $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ y las operaciones $x \cdot y := (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x + y := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda x := (\lambda \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para cada $x, y \in l^\infty, \lambda \in \mathbb{C}$, entonces se tiene que l^∞ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad de norma igual a 1.

4.3. Invertibilidad en álgebras de Banach con unidad

Una vez presentado el concepto de álgebra, nuestra labor ahora consiste en averiguar cuáles son sus unidades. Pues bien, es evidente que, dado A un álgebra con unidad cualquiera, todo múltiplo escalar no nulo de 1_A tiene inverso, ya que, dado $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0_{\mathbb{C}}\}$, se tiene que $(\lambda 1_A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}1_A \in A$. Sin embargo, no es inmediato, a simple vista, obtener para un álgebra A con unidad de dimensión mayor que 1 otro tipo de unidades más allá de las mencionadas. En esta sección supondremos que A es un álgebra de Banach con unidad (de norma igual a 1; véase la nota 4.1.5) y veremos que, gracias al carácter completo de A, podemos encontrar otro tipo de unidades. Para su desarrollo se ha seguido [2, p. 212-215].

Teorema 4.3.1. *Sea $z \in A\backslash\{0_A\}$ tal que $\|z\| < 1$. Se tiene lo siguiente:*

1. *$1_A - z$ es invertible.*
2. *$(1_A - z)^{-1} = \lim\limits_n y_n = y$, donde $y_n = 1_A + z + z^2 + ... + z^{n-1}$.*
3. *$\|(1_A - z)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|z\|}$.*

Demostración. El cometido inicial consiste, antes que nada, en probar que la sucesión (y_n) es convergente. Para ello, y como A es de Banach por hipótesis, basta ver que la sucesión es de Cauchy. Fijemos $\epsilon > 0$ y comprobemos que existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_p - y_q\| < \epsilon$ para todo $p, q \geq N_\epsilon$:
Sea q un número natural cualquiera. Tenemos, por un lado, que para todo $p \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\|y_{q+p} - y_q\| = \left\|\sum_{k=q}^{p+q-1} z^k\right\| &\leq \sum_{k=q}^{p+q-1} \|z^k\| \\
&\leq \sum_{k=q}^{p+q-1} \|z\|^k = \|z\|^q \sum_{k=0}^{p-1} \|z\|^k \\
&\leq \|z\|^q \sum_{k=0}^{\infty} \|z\|^k = \frac{\|z\|^q}{1 - \|z\|}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que, como $\|z\| < 1$, se sigue que $\lim\limits_{q\to\infty} \|z\|^q = 0$ y, por tanto, que $\lim\limits_{q\to\infty} \dfrac{\|z\|^q}{1 - \|z\|} = 0$. Por tanto, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $q \geq N_\epsilon$ se satisface que

$$\frac{\|z\|^q}{1 - \|z\|} = \left\|\frac{\|z\|^q}{1 - \|z\|} - 0\right\| < \epsilon.$$

Juntando esto anterior llegamos a que para todo $q \geq N_\epsilon$ y para todo $p \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|y_{q+p} - y_q\| \leq \frac{\|z\|^q}{1 - \|z\|} < \epsilon$$

o, lo que es lo mismo, que $\|y_m - y_q\| < \epsilon$ para todo $m, q \geq N_\epsilon$.
En resumen, $(y_n)_n$ es de Cauchy. Y, por ello, existe $y \in A$ tal que $y_n \to y$.

Una vez visto esto, pasamos a probar los tres apartados pendientes. Tenemos para $n \in \mathbb{N}$ y para $z \in A\backslash\{0_A\}$ que se satisface lo siguiente:

$$zy_n = y_n z = z + z^2 + ... + z^n = y_{n+1} - 1_A. \quad (*)$$

Ahora, como se tiene, por ser A un álgebra normada, que

$$\|zy_n - zy\| = \|z(y_n - y)\| \leq \|z\| \cdot \|y_n - y\|,$$
$$\|y_n z - yz\| = \|(y_n - y)z\| \leq \|y_n - y\| \cdot \|z\|,$$

y como también se tiene que $\lim_n \|y_n - y\| = 0$, se sigue que $\lim_n \|zy_n - zy\| = 0 = \lim_n \|y_n z - yz\|$, es decir, que $\lim_n zy_n = zy$ y que $\lim_n y_n z = yz$. Por tanto, aplicando límites en (*), se llega a que

$$zy = yz = y - 1_A.$$

Con ello, se sigue que $1_A = y - yz = y(1_A - z)$ y también que $1_A = y - zy = (1_A - z)y$. En definitiva, concluimos que

$$(1_A - z)^{-1} = y.$$

Quedan probados los apartados 1 y 2.

Ahora, como resulta que

$$\|y_n\| \leq 1 + \|z\| + ... + \|z\|^{n-1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|z\|^k = \frac{1}{1 - \|z\|}$$

y, como por el corolario 2.1.1 se cumple que $\lim_n \|y_n\| \to \|y\|$, entonces

$$\|y\| = \|(1_A - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|z\|}.$$

Esto prueba el apartado 3. $\square$

Nota 4.3.1. *Si $z = 0_A$, entonces $\lambda 1_A - z$ es invertible para todo $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0_{\mathbb{C}}\}$, siendo su inverso $(\lambda 1_A - z)^{-1} = \lambda^{-1} 1_A$. Con ello, se sigue que $\|(\lambda 1_A - z)^{-1}\| = \dfrac{1}{|\lambda|}$.*

Nota 4.3.2. *Al límite de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ asociado al teorema anterior se le puede denotar como $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ (siendo, por convenio, $z^0 = 1_A$ con $z \in A \backslash \{0_A\}$).*

Corolario 4.3.1. *Sea $x \in A$ con $\|1_A - x\| < 1$. Se tiene que x es invertible y se satisface que $x^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (1_A - x)^k$ y $\|x^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|1_A - x\|}$.*

Demostración. Basta aplicar el teorema anterior para $z = 1_A - x$. $\square$

Corolario 4.3.2. *Sean $x \in A \backslash \{0_A\}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $|\lambda| > \|x\|$. Se tiene que $\lambda 1_A - x$ es invertible con*

$$(\lambda 1_A - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} x^k,$$
$$\|(\lambda 1_A - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}.$$

Demostración. Sean $x \in A\backslash\{0_A\}, \lambda \in \mathbb{C}$ escogidos de acuerdo a las hipótesis. Como se tiene que $|\lambda| > \|x\| > 0$, concluimos que $\lambda \neq 0_{\mathbb{C}}$, y también que $|\lambda^{-1}| = \dfrac{1}{|\lambda|} < \dfrac{1}{\|x\|}$. Esto nos lleva a que

$$\|\lambda^{-1}x\| = |\lambda^{-1}| \cdot \|x\| < \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Por consiguiente, estamos en condiciones de aplicar el teorema 4.3.1 para $z = \lambda^{-1}x$. Así, concluimos que $1_A - z$ es invertible y que su inverso es el siguiente:

$$(1_A - z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda^{-1}x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k}x^k.$$

Además, se tiene, por ser $1_A - z$ invertible, que $\lambda(1_A - z) = \lambda 1_A - x$ es invertible y su inverso es el siguiente:

$$(\lambda 1_A - x)^{-1} = (\lambda(1_A - z))^{-1} = \lambda^{-1}(1_A - z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}x^k \qquad (1)$$

(la igualdad $(\lambda(1_A - z))^{-1} = \lambda^{-1}(1_A - z)^{-1}$ se tiene porque, por definición de álgebra, $(\lambda^{-1}(1_A - z)^{-1}) \cdot \lambda(1_A - z) = (1_A - z)^{-1} \cdot (\lambda^{-1} \cdot \lambda(1_A - z)) = 1_A = \lambda(1_A - z) \cdot (\lambda^{-1}(1_A - z)^{-1})$).
Para finalizar, se concluye, aplicando (1) y por el teorema 4.3.1, que

$$\begin{aligned} \|(\lambda 1_A - x)^{-1}\| &= \|\lambda^{-1}(1_A - z)^{-1}\| \\ &= |\lambda^{-1}| \cdot \|(1_A - z)^{-1}\| \\ &\leq \frac{|\lambda^{-1}|}{1 - \|z\|} \\ &= \frac{1}{|\lambda| - |\lambda||\lambda^{-1}|\|x\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}. \end{aligned}$$

Queda por tanto probado. □

Corolario 4.3.3. *$U(A)$ es un subconjunto abierto de A. Concretamente se tiene que, dado $y \in U(A)$,*

$$B(y; \|y^{-1}\|^{-1}) \subset U(A).$$

Demostración. Para probar que $U(A)$ es un conjunto abierto basta ver que para cada $y \in U(A)$ existe un subconjunto abierto de $U(A)$ que contiene a dicho elemento.
Fijemos $y \in U(A)$ (es evidente que $y \neq 0_A$, ya que $0_A x = 0_A \neq 1_A$ para todo $x \in A$) y consideremos la bola abierta $B(y; \|y^{-1}\|^{-1}) = \{x \in A : \|x - y\| < \|y^{-1}\|^{-1}\}$; veamos a continuación que dicha bola queda contenida en $U(A)$:
Sea $x \in B(y; \|y^{-1}\|^{-1})$. Se tiene, por un lado, que, como $\|x - y\| < \|y^{-1}\|^{-1}$, se cumple que

$$\|(x - y)y^{-1}\| \leq \|x - y\| \cdot \|y^{-1}\| < \|y^{-1}\|^{-1} \cdot \|y^{-1}\| = 1.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\|(x - y)y^{-1}\| = \|xy^{-1} - 1_A\| = \|1_A - xy^{-1}\|.$$

Por lo tanto, concluimos que $\|1_A - xy^{-1}\| < 1$ y, aplicando el corolario 4.3.1, llegamos a que $xy^{-1} = 1_A - (1_A - xy^{-1}) \in U(A)$. Ahora, como $x = (xy^{-1})y$ es producto de elementos invertibles en A, se sigue que x es invertible. Por consiguiente, $x \in U(A)$ y, con ello, se tiene que $B(y; \|y^{-1}\|^{-1}) \subset U(A)$.
Queda probado que $U(A)$ es un conjunto abierto. □

Teorema 4.3.2. *La aplicación $x \mapsto x^{-1}$ de $U(A)$ en $U(A)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. La biyectividad de $x \mapsto x^{-1}$ se tiene, en primer lugar, porque para todo $x, y \in U(A)$ con $x \neq y$ se tiene que $x^{-1} \neq y^{-1}$ (si $x^{-1} = y^{-1} = b \neq 0_A$, entonces se sigue que, como $bx = by = 1_A$, $b(x-y) = 0_A$. Con ello, $x = y$) y, en segundo lugar, porque para todo $x^{-1} \in U(A)$ su contraimagen es justamente x. El siguiente paso consiste en demostrar que la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es continua (probado esto, la continuidad de la aplicación inversa $x^{-1} \mapsto x$ es inmediata: basta reescribirla como $y \mapsto y^{-1}$ con $y = x^{-1}$). Veámoslo:
Sean $x \in U(A)$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $U(A)$ tales que $\|x_n - x\| \to 0$. Si probamos que la sucesión de las imágenes de x_n converge a x^{-1}, es decir, que $\|{x_n}^{-1} - x^{-1}\| \to 0$, entonces tendremos que la aplicación de partida es continua en x. Para ello, tenemos, por un lado, que

$$ {x_n}^{-1} - x^{-1} = {x_n}^{-1}(1_A - x_n x^{-1}) = {x_n}^{-1}(x - x_n)x^{-1} $$

y, por tanto, que

$$ \|{x_n}^{-1} - x^{-1}\| = \|{x_n}^{-1}(x - x_n)x^{-1}\| \leq \|{x_n}^{-1}\| \cdot \|x - x_n\| \cdot \|x^{-1}\|. \qquad (1) $$

Por otro lado, hemos de verificar si se satisface que para $y \in A$ "suficientemente cerca" de x, entonces se cumple que $\|y^{-1}\|$ está acotado. Si comprobamos esto, podremos transformar la expresión (1) en otra de la forma siguiente, para algún $k > 0$:

$$ \|{x_n}^{-1} - x^{-1}\| \leq k \cdot \|x - x_n\|. $$

Supongamos pues que $y \in A$ es tal que $\|y - x\| \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$ (dicho y existe; basta considerar $y = x + \lambda z$, donde $z \in A, \|z\| = 1$, y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$). Se tiene, por el corolario 4.3.3, que y es invertible.
También, como se satisface que

$$ \|1_A - x^{-1}y\| = \|x^{-1}(x-y)\| \leq \|x^{-1}\| \cdot \|x - y\| \leq \tfrac{1}{2}\|x^{-1}\|\|x^{-1}\|^{-1} = \tfrac{1}{2}, $$

podemos aplicar el corolario 4.3.1 para $z = x^{-1}y$. Así, llegamos a que $x^{-1}y$ es invertible y que

$$ \|(x^{-1}y)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|1_A - x^{-1}y\|} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2, $$

o, lo que es lo mismo, que $\|y^{-1}x\| \leq 2$. Con esto, concluimos que

$$ \|y^{-1}\| = \|(y^{-1}x)x^{-1}\| \leq \|y^{-1}x\|\|x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|. $$

En resumen, se tiene que si $y \in A$ es tal que $\|y - x\| \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$, entonces

$$ \|y^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|. \qquad (2) $$

Ahora que sabemos que para $y \in A$ "suficientemente cerca" de x se cumple que $\|y^{-1}\|$ está acotado, podemos aplicarlo a la sucesión de partida, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, del siguiente modo:
Sea $\epsilon = \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1} > 0$. Como $x_n \to x$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_\epsilon$ se cumple que $\|x_n - x\| < \epsilon$ y, por tanto y aplicando (2), se satisface que $\|{x_n}^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|$. Ahora, a partir de (1) se tiene para todo $n \geq N_\epsilon$ que

$$ \|{x_n}^{-1} - x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\| \cdot \|x - x_n\| \cdot \|x^{-1}\|. $$

Por tanto, si hacemos tender n a ∞, entonces $\|x - x_n\| \to 0$ y, en consecuencia y como $\|x^{-1}\|$ es fijo, obtenemos que $\|{x_n}^{-1} - x^{-1}\| \to 0$. Con esto, se prueba que la aplicación de partida es continua en x y, en definitiva, en todo su dominio. $\square$

4.4. Resolvente y espectro en álgebras de Banach con unidad

Este apartado constituye una continuación de la sección 4.3. Aquí se enuncian algunos resultados relativos a los conjuntos resolvente y espectro de un elemento $x \in A$. Estos conjuntos relacionan, respectivamente, las unidades y los elementos singulares de A, que supondremos, nuevamente, que es un álgebra de Banach con unidad (de norma igual a 1), con el cuerpo de escalares $\mathbb{C}$ de A. Como resultado importante se ofrece el teorema de Gel'fand Mazur, el cual nos permitirá construir (concretamente, en la nota 5.1.4 del capítulo siguiente), dado un ideal maximal M cualquiera de un álgebra de Gel'fand, un homomorfismo de álgebras η_M de dicho álgebra en $\mathbb{C}$. Para su desarrollo se ha seguido [2, p. 216-218].

Definición 4.4.1. *Sea $x \in A$. El **conjunto resolvente** de x se define como*

$$\rho(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1_A - x \in U(A)\}.$$

*Se llama **espectro** de x al conjunto complementario*

$$\sigma(x) := \mathbb{C} \backslash \rho(x).$$

Teorema 4.4.1. *Sea $x \in A$. Se tiene que $\rho(x)$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}$ con*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \ : |\lambda| > \|x\|\} \ \subset \ \rho(x).$$

Asimismo, $\sigma(x)$ es un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$ con $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}$.

Demostración. Si consideramos, dado $x \in A$, la aplicación de $\mathbb{C}$ en A dada por $\lambda \mapsto \lambda 1_A - x$, que es continua por ser suma de dos aplicaciones continuas, entonces se tiene que, como $U(A)$ es abierto por el corolario 4.3.3, su contraimagen, que coincide con $\rho(x)$, es abierta. Además, basta considerar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|x\|$ para concluir, por el el corolario 4.3.2, que $\rho(x)$ es no vacío. De hecho, $\{\lambda \in \mathbb{C} \ : |\lambda| > \|x\|\} \ \subset \ \rho(x)$. Con todo lo anterior, se sigue que $\sigma(x)$ es un conjunto cerrado, por ser el complementario de $\rho(x)$, y también que $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}$, es decir, el espectro de x está acotado por $\|x\|$.

□

Definición 4.4.2. *Sea $x \in A$. Se denomina **función resolvente** de x a la aplicación $R_x : \rho(x) \to U(A) \subset A$ dada por*

$$R_x(\lambda) := (\lambda 1_A - x)^{-1}, \ \lambda \in \rho(x).$$

Lema 4.4.1. *Sea $x \in A$. Se tiene, dados $\lambda, \mu \in \rho(x)$, que*

$$R_x(\lambda) - R_x(\mu) = -(\lambda - \mu) R_x(\lambda) R_x(\mu).$$

Demostración. Sean $\lambda, \mu \in \rho(x)$. Se satisface que

$$\begin{aligned}
R_x(\lambda) - R_x(\mu) &= (\lambda 1_A - x)^{-1} - (\mu 1_A - x)^{-1} \\
&= (\lambda 1_A - x)^{-1}[1_A - (\lambda 1_A - x)(\mu 1_A - x)^{-1}] \\
&= (\lambda 1_A - x)^{-1}[(\mu 1_A - x) - (\lambda 1_A - x)](\mu 1_A - x)^{-1} \\
&= (\lambda 1_A - x)^{-1}[\mu 1_A - \lambda 1_A](\mu 1_A - x)^{-1} \\
&= -(\lambda - \mu) R_x(\lambda) R_x(\mu).
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.4.2. *Sea $x \in A$. Se satisface lo siguiente:*

1. $\lim\limits_{\lambda \to \infty} R_x(\lambda) = 0_A$.

2. *R_x es diferenciable para todo $\lambda \in \rho(x)$, en el sentido de que el límite*

$$\lim_{h \to 0_{\mathbb{C}}} (1/h)[R_x(\lambda + h) - R_x(\lambda)]$$

existe. Además, el valor de dicho límite es $-(\lambda 1_A - x)^{-2}$.

Demostración. 1) Fijemos $x \in A$. Se tiene, a partir del teorema 4.4.1, que el límite planteado tiene sentido, ya que, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda > \|x\|$, se satisface que $\lambda \in \rho(x)$. Veamos pues que se da la igualdad. Consideremos una sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\rho(x)$ tal que $|\lambda_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y supongamos que $\lambda_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que ver que $R_x(\lambda_n) \to 0_A$ cuando $n \to \infty$. Comprobémoslo:
Se satisface que $\lambda_n^{-1} \to 0_{\mathbb{C}}$ cuando $n \to \infty$. Con ello, $\|\lambda_n^{-1} x\| = |\lambda_n^{-1}| \|x\| \to 0_{\mathbb{C}}$, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n^{-1} x = 0_A, \qquad (1)$$

lo que a su vez implica que

$$\lim_{n \to \infty} 1_A - \lambda_n^{-1} x = 1_A. \qquad (2)$$

Ahora, se tiene, por (1), que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\lambda_n^{-1} x - 0_A\| < 1$ para todo $n \geq n_0$ y, en consecuencia y aplicando el teorema 4.3.1, se sigue que $1_A - \lambda_n^{-1} x \in U(A)$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto, si consideramos la sucesión $(1_A - \lambda_n^{-1} x)_{n \in \mathbb{N}}$, se tiene que, como dicha sucesión converge, por (2), a $1_A \in U(A)$, y como la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ de $U(A)$ en $U(A)$ es continua en virtud del teorema 4.3.2, la sucesión de las imágenes de dicha sucesión (sin más que considerar $n \geq n_0$) converge a $1_A^{-1} = 1_A$, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} (1_A - \lambda_n^{-1} x)^{-1} = 1_A^{-1} = 1_A. \qquad (3)$$

Ahora, como, por construcción, $\lambda_n \in \rho(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se satisface que

$$R_x(\lambda_n) = (\lambda_n 1_A - x)^{-1} = (\lambda_n (1_A - \lambda_n^{-1} x))^{-1} = \lambda_n^{-1} (1_A - \lambda_n^{-1} x)^{-1}.$$

Con ello, y aplicando (3), $R_x(\lambda_n) = \lambda_n^{-1} (1_A - \lambda_n^{-1} x)^{-1} \to 0_A \cdot 1_A = 0_A$ cuando $n \to \infty$.

2) Sea $\lambda \in \rho(x)$. Como, por el teorema 4.4.1, $\rho(x)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, existe $r > 0$ tal que $B(\lambda; r) \subset \rho(x)$. Ahora, si consideramos $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$, tal que $|h| < r$, entonces, como $|\lambda - (\lambda + h)| < r$, se deduce que $\lambda + h \in \rho(x)$. Con ello, y aplicando el lema 4.4.1,

$$R_x(\lambda + h) - R_x(\lambda) = -h R_x(\lambda + h) R_x(\lambda), \text{ para } |h| < r.$$

Por tanto, como $h \neq 0_{\mathbb{C}}$,

$$(1/h)[R_x(\lambda + h) - R_x(\lambda)] = -R_x(\lambda + h) R_x(\lambda),$$

y, como R_x es una aplicación continua (por ser composición de las aplicaciones continuas $\lambda \mapsto \lambda 1_A - x$ y $z \mapsto z^{-1}$), se tiene, para $\lambda \in \rho(x)$, que $\lim\limits_{h \to 0_{\mathbb{C}}} R_x(\lambda + h) = R_x(\lambda)$. Con ello,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0_{\mathbb{C}}} (1/h)[R_x(\lambda + h) - R_x(\lambda)] &= \lim_{h \to 0_{\mathbb{C}}} -R_x(\lambda + h) R_x(\lambda) \\ &= -R_x(\lambda)^2 \\ &= -(\lambda 1_A - x)^{-2}. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.4.3. *Sean $x \in A$ y $f : A \to \mathbb{C}$ un funcional lineal continuo. Se tiene lo siguiente:*

1. $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f(R_x(\lambda)) = 0_{\mathbb{C}}$.
2. *La aplicación de $\rho(x)$ en $\mathbb{C}$ dada por $\lambda \mapsto f(R_x(\lambda))$ es diferenciable para todo $\lambda \in \rho(x)$, con derivada $-f((\lambda 1_A - x)^{-2})$*

Demostración. 1) Como $R_x(\lambda) \in U(A) \subset A$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > \|x\|$, y como se tiene, por el teorema 4.4.2, que $\lim\limits_{\lambda \to \infty} R_x(\lambda) = 0_A \in A$, se satisface, por la continuidad de f, que

$$\lim_{\lambda \to \infty} f(R_x(\lambda)) = f(0_A) = 0_{\mathbb{C}}.$$

2) Fijemos $\lambda \in \rho(x)$ (de nuevo, como $\rho(x)$ es abierto en $\mathbb{C}$, existe $r > 0$ tal que $B(\lambda; r) \subset \rho(x)$; si consideramos $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0_{\mathbb{C}}$, tal que $|h| < r$, entonces tiene sentido hablar de $R_x(\lambda + h)$, ya que, como $|\lambda - (\lambda + h)| = |h| < r$, se sigue que $\lambda + h \in B(\lambda; r) \subset \rho(x)$).
Se tiene que $(1/h)[R_x(\lambda + h) - R_x(\lambda)] \in A$ para $h \in \mathbb{C}\backslash\{0_{\mathbb{C}}\}$ suficientemente pequeño (en valor absoluto). Asimismo, por el teorema 4.4.2, se satisface que

$$\lim_{h \to 0_{\mathbb{C}}} (1/h)[R_x(\lambda + h) - R_x(\lambda)] = -(\lambda 1_A - x)^{-2} \in A. \qquad (1)$$

Por tanto, como f es continua y lineal, se sigue, con (1), que

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0_{\mathbb{C}}} f(\,(1/h)[R_x(\lambda + h) - R_x(\lambda)]\,) &= f(-(\lambda 1_A - x)^{-2}) \\ &= -f((\lambda 1_A - x)^{-2}). \end{aligned}$$

Con esto anterior, se concluye, por la linealidad de f, que

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0_{\mathbb{C}}} f(\,(1/h)[R_x(\lambda + h) - R_x(\lambda)]\,) &= \lim_{h \to 0_{\mathbb{C}}} (1/h)[f(R_x(\lambda + h)) - f(R_x(\lambda))] \\ &= -f((\lambda 1_A - x)^{-2}) \end{aligned}$$

y, en definitiva, que la aplicación de partida es diferenciable en $\lambda \in \rho(x)$. Variando $\lambda \in \rho(x)$, se concluye la diferenciabilidad en todo $\rho(x)$.

□

Nota 4.4.1. *Nótese que, aunque algunos de los resultados ofrecidos hasta ahora pueden ser válidos si consideramos como álgebra de Banach con unidad una cuyo cuerpo de escalares sea $\mathbb{R}$, el hecho de exigir que el cuerpo de escalares en A sea justamente $\mathbb{C}$ es diferencial, ya que, de no ser así, entonces no se podría garantizar la veracidad del teorema que se enuncia a continuación (y, como consecuencia, tampoco se podría garantizar la prueba del teorema 4.4.5 de Gel'fand-Mazur, teorema indispensable para el desarrollo del capítulo* 5*; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces se satisface que $\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1_A - x \in U(A)\} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda 1_A - x \in U(A)\}$).*

Teorema 4.4.4. *Si A es un álgebra de Banach con unidad (sobre $\mathbb{C}$). Entonces $\rho(x)$ es un subconjunto propio de $\mathbb{C}$ para todo $x \in A$.*

Demostración. Si $x = 0_A$, entonces $\lambda = 0_{\mathbb{C}} \notin \rho(x)$, ya que $\lambda 1_A - x = 0_A \notin U(A)$.
Supongamos ahora que, por reducción a lo absurdo, existe $x \in A\backslash\{0_A\}$ tal que $\rho(x) = \mathbb{C}$. Se sigue, por ello, que R_x está definida en $\mathbb{C}$. Además, si consideramos un funcional lineal continuo arbitrario $f : A \to \mathbb{C}$, se tiene, en virtud del teorema 4.4.3, que la aplicación $f \circ R_x$, que va de $\rho(x) = \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, es entera. Asimismo, $f \circ R_x$ está acotada, ya que, como

por el teorema 4.4.3 se tiene que $\lim_{\lambda\to\infty} f(R_x(\lambda)) = 0_{\mathbb{C}}$, dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que si $|z| > R$, entonces se tiene que $|f(R_x(\lambda))| < \epsilon$ (por otro lado, como la bola cerrada $\overline{B(0_{\mathbb{C}}; R)}$ es compacta y $f \circ R_x$ es continua, se tiene que $f(R_x(\overline{B(0_{\mathbb{C}}; R)}))$ es compacto y, con ello, cerrado y acotado). En resumen, $f \circ R_x$ es una función entera y acotada (tanto en $\overline{B(0_{\mathbb{C}}; R)}$, como en $\mathbb{C}\backslash\overline{B(0_{\mathbb{C}}; R)}$). Por consiguiente, aplicando el teorema de Liouville, se concluye que $f \circ R_x$ es una función constante. De hecho, como por el teorema 4.4.3 se tiene que $\lim_{\lambda\to\infty} f(R_x(\lambda)) = 0_{\mathbb{C}}$, se deduce que $f(R_x(\lambda)) = 0_{\mathbb{C}}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. En particular para $\lambda = 0_{\mathbb{C}}$, tenemos que, como f es lineal, $f(R_x(0_{\mathbb{C}})) = f((-x)^{-1}) = -f(x^{-1}) = 0_{\mathbb{C}}$ ($(\lambda 1_A - x)^{-1} = (-x)^{-1} \in U(A)$ porque $\lambda = 0_{\mathbb{C}} \in \rho(x)$). En resumen, para todo funcional lineal y continuo $f : A \to \mathbb{C}$ se satisface que $f(x^{-1}) = 0_{\mathbb{C}}$. No obstante, llegamos a una contradicción, ya que, como A es un espacio normado, existe, por el teorema A.0.2, un funcional lineal y continuo g tal que $g(x^{-1}) = \|x^{-1}\| > 0_{\mathbb{C}}$ ($x^{-1} \neq 0_A$) y $\|g\| = 1$. Por consiguiente, no puede existir $x \in A\backslash\{0_A\}$ tal que $\rho(x) = \mathbb{C}$. Con ello, se concluye que $\rho(x)$ es un subconjunto propio de $\mathbb{C}$ para todo $x \in A$. □

Corolario 4.4.1. *El espectro de x es un subconjunto no vacío y compacto de $\mathbb{C}$.*

Demostración. El carácter no vacío de $\sigma(x)$ se deduce a partir del teorema 4.4.4. La compacidad es inmediata a partir del teorema 4.4.1. □

Definición 4.4.3. *Sea $x \in A$. El **radio espectral** de x, denotado por $r(x)$, se define como*

$$r(x) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Dicho radio está bien definido pues, por el corolario 4.4.1, $\sigma(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in A$. Además se satisface, en virtud del teorema 4.4.1, que $0 \leq r(x) \leq \|x\|$.

El teorema siguiente nos indica que el único álgebra de Banach A que es a su vez un álgebra de división, no necesariamente conmutativa, es justamente $A \cong \mathbb{C}$:

Teorema 4.4.5. *(Teorema de Gel'fand-Mazur) Si A es un álgebra de Banach con unidad de norma igual a 1, no necesariamente conmutativa, tal que $U(A) = A\backslash\{0_A\}$, entonces A es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión 1 ó, equivalentemente, A es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$ por medio de la aplicación $\lambda \mapsto \lambda 1_A$.*

Demostración. Es evidente que la aplicación $\lambda \mapsto \lambda 1_A$ es un monomorfismo isométrico. Veamos ahora que es además un epimorfismo:
Sea $x \in A$ tal que $x \neq 0_A$. Tenemos que encontrar la contraimagen de x. En primer lugar se tiene, por el teorema 4.4.4, que $\rho(x)$ es un subconjunto propio de $\mathbb{C}$. Por tanto, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda 1_A - x$ es singular. Ahora, como por hipótesis $U(A) = A\backslash\{0_A\}$, se deduce que $\lambda 1_A - x = 0_A$ y, en consecuencia, que $\lambda 1_A = x$. □

Capítulo 5

Representación de Gel'fand de un álgebra de Banach conmutativa con unidad

5.1. Lemas previos

Expuestas ya algunas de las propiedades que caracterizan a un álgebra de Banach conmutativa con unidad A, el fin de esta sección es el de estudiar el espacio formado por los homomorfismos de álgebras de A en $\mathbb{C}$ dotado de la topología débil-* (que, como se verá más adelante, es homeomorfo al espacio de ideales maximales de A, ideales que coinciden con los núcleos de dichos homomorfismos). Este espacio, es el espacio compacto sobre el cual se construye el espacio de funciones continuas que contiene al representante del álgebra en cuestión.
Supondremos, sin pérdida de generalidad (véase la nota 4.1.5), que la unidad en A tiene norma igual a 1 y trabajaremos (siguiendo [2, p. 220-222]) con la posterior definición:

Definición 5.1.1. *Un **álgebra de Gel'fand**, denotada usualmente por A, es un álgebra de Banach con unidad de norma igual a 1 y conmutativa.*

Lema 5.1.1. *Sea A un álgebra de Gel'fand. Se tiene lo siguiente:*

1. *Si I es un ideal de A, entonces $\overline{I}$ es un ideal de A. Si además I es un ideal propio de A, $\overline{I}$ también lo es.*

2. *Si M es un ideal maximal de A, entonces M es cerrado.*

Demostración. 1) Sea I un ideal de A. Veamos que $\overline{I}$ es un ideal de A. Para ello, vamos a probar, en primer lugar, que $\overline{I}$ es un subgrupo con la suma de A. Por lo tanto, si consideramos $a, b \in \overline{I}$ cualesquiera, tenemos que ver que $a - b \in \overline{I}$, es decir, que $B(a-b; r) \cap I \neq \emptyset$ para todo $r > 0$. Comprobémoslo:
Fijemos $r > 0$. Se tiene que, como $a, b \in \overline{I}$, $B(a; \frac{r}{2}) \cap I \neq \emptyset$ y $B(b; \frac{r}{2}) \cap I \neq \emptyset$, es decir, existen $a', b' \in I$ tales que $\|a' - a\| < \dfrac{r}{2}$ y $\|b' - b\| < \dfrac{r}{2}$. Ahora, como

$$\|a' - b' - (a - b)\| \leq \|a' - a\| + \|b' - b\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

se sigue que $a' - b' \in B(a-b; r)$. Además, como $a' - b' \in I$ por ser I grupo, se deduce que $B(a-b; r) \cap I \neq \emptyset$. Variando $r > 0$ y $a, b \in \overline{I}$, concluimos que $a - b \in \overline{I}$ y, en definitiva, que $\overline{I}$ es subgrupo de A.

Probemos, en segundo lugar, que $a \cdot w \in \overline{I}$ para todo $a \in \overline{I}$ y para todo $w \in A$:
Si $w = 0_A$, entonces $a \cdot 0_A = 0_A \in \overline{I}$, para todo $a \in \overline{I}$. Consideremos pues $w \in A \backslash \{0_A\}$, $a \in \overline{I}$ y fijemos $r > 0$. Se tiene que, para $p = \frac{r}{\|w\|} > 0$, se cumple que $B(a; \frac{r}{\|w\|}) \cap I \neq \emptyset$, ya que $a \in \overline{I}$. Por ello, si tomamos $b \in B(a; \frac{r}{\|w\|}) \cap I$, entonces se satisface, por un lado y por definición de ideal, que $b \cdot w \in I$, y, por otro lado y porque $\|b - a\| < \dfrac{r}{\|w\|}$, que

$$\|b \cdot w - a \cdot w\| = \|(b - a) \cdot w\| \leq \|b - a\| \cdot \|w\| < \frac{r}{\|w\|} \cdot \|w\| = r.$$

Por tanto, $b \cdot w \in B(a \cdot w; r)$. Además, como $b \cdot w \in I$, llegamos a que $B(a \cdot w; r) \cap I \neq \emptyset$ y, en definitiva, que $a \cdot w \in \overline{I}$ (sin más que variar $r > 0$).

Supongamos ahora que I es un ideal propio de A. Se sigue que I es un subconjunto de $A - U(A)$ (en caso contrario existirían $a, b \in I$ tales que $a \cdot b = 1_A \in I$, lo cual implicaría que $1_A \cdot z \in I$ para todo $z \in A$ y, en contradicción con la hipótesis, que $I = A$). Ahora, como $A - U(A)$ es cerrado por el *corolario 4.3.3* e $I \subset A - U(A)$, se tiene que $\overline{I} \subset A - U(A)$. Con ello, y como se cumple que $1_A \notin A - U(A)$, $\overline{I}$ es un ideal propio de A.

2) Sea M un ideal maximal de A. Se tiene, por el apartado anterior, que $\overline{M}$ es también un ideal propio de A. Ahora, como $M \subset \overline{M}$ y M es un ideal maximal por hipótesis, resulta que $M = \overline{M}$ y, en conclusión, que M es cerrado.

□

Nota 5.1.1. *Sea A un álgebra conmutativa con unidad. Si I es un ideal propio de A, entonces A/I es un álgebra conmutativa con unidad con las operaciones $(x+I)+(y+I) := (x+y)+I$, $(x+I)\cdot(y+I) := (xy)+I$, $\lambda(x+I) := (\lambda x)+I$ para cada $x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Los elementos neutros para la suma y el producto son respectivamente $0_{A/I} = I = 0_A + I$ y $1_{A/I} = 1_A + I$. Asimismo, se tiene que todo ideal I de A es un subespacio vectorial de A (se sigue, por definición de álgebra, que, dados $x \in I$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda x = \lambda 1_A \cdot x$, luego, por definición de ideal, $\lambda x \in I$. Con ello, $\lambda x + \mu y \in I$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $x, y \in A$).*
*Se denomina **aplicación canónica** a la aplicación π dada por*

$$\begin{aligned} \pi \colon A &\to A/I \\ x &\to \pi(x) := x + I. \end{aligned}$$

Dicha aplicación define un epimorfismo de álgebras.

De ahora en adelante, y salvo que se indique lo contrario, denotaremos por A a un álgebra de Gel'fand.

Lema 5.1.2. *Si I un ideal propio cerrado de A, entonces A/I, junto con la norma definida en la proposición 2.1.3, es un álgebra de Gel'fand. Además la aplicación $\pi : A \to A/I$ es continua con $\|\pi\| = 1$.*

Demostración. Se tiene, por la nota anterior, que, como A es un álgebra conmutativa con unidad, A/I es también un álgebra conmutativa con unidad. Además, como A es un espacio de Banach e I es un subespacio vectorial cerrado de A, se sigue, por la proposición 2.1.3, que A/I es también un espacio de Banach. En definitiva, basta ver que A/I es un álgebra normada y que $\|1_A + I\| = 1$ para concluir que A/I es un álgebra de Gel'fand. Veamos primero que $\|u \cdot v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ para todo $u, v \in A/I$:
Sean $u, v \in A/I$. Se tiene, dados $x \in u, y \in v$, que $u = x + I$ y $v = y + I$. Ahora, como

$xy \in xy + I = (x+I)(y+I) = uv$, se sigue, por cómo está definida la norma en A/I, que $\|uv\| \leq \|xy\|$. Asimismo, se tiene, por definición de álgebra normada, que $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ para todo $x, y \in A$. Con ello, se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|uv\| &\leq \text{ínf}\{\|xy\| : x \in u, y \in v\} \\ &\leq \text{ínf}\{\|x\| \cdot \|y\| : x \in u, y \in v\} \\ &= \text{ínf}\{\|x\| : x \in u\} \cdot \text{ínf}\{\|y\| : x \in v\} \\ &= \|u\|\|v\|. \end{aligned}$$

Ahora, como para todo $x \in A$ se tiene que $x \in \pi(x)$, se satisface, por definición de la norma en A/I, que $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$. Con esto, π es continua y $\|\pi\| \leq 1$. Por otro lado, como $\|\pi(1_A)\| = \|\pi(1_A)\pi(1_A)\| \leq \|\pi(1_A)\|\|\pi(1_A)\|$, se sigue que $\|\pi(1_A)\| \geq 1$. Con ello, y como $\|\pi(1_A)\| \leq \|1_A\|$, se concluye que $\|\pi(1_A)\| = \|1_A + I\| = 1 = \|1_A\|$. Con esto, deducimos que $\|\pi\| = 1$ y también que A/I es un álgebra de Gel'fand. □

Lema 5.1.3. *Si M es un ideal maximal de A, entonces A/M y $\mathbb{C}$ son isométricamente isomorfos como álgebras mediante la aplicación $\lambda \mapsto \lambda(1_A + M)$.*

Demostración. Se deduce en primer lugar y aplicando el lema 5.1.1 que, como M es un ideal maximal de A, M es un ideal propio cerrado. Con ello se tiene, aplicando el lema 5.1.2, que A/M es un álgebra de Gel'fand. Por otro lado, como A es un anillo conmutativo con unidad y M es un ideal maximal de A, se sigue, por teoría elemental de anillos, que A/M es un cuerpo. Por tanto, como A/M es un álgebra de Banach con unidad y A/M es cuerpo, se sigue, por el teorema 4.4.5, que A/M es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$ mediante la aplicación de $\mathbb{C}$ en A/M dada por $\lambda \mapsto \lambda(1_A + M)$. □

Nota 5.1.2. *Si M es un ideal maximal de A, entonces para todo $x \in A$ existe un único escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x + M = \lambda(1_A + M) = \lambda 1_{A/M}$.*

Nota 5.1.3. *Nótese que todo homomorfismo de álgebras de A en $\mathbb{C}$ es a su vez un epimorfismo.*

De ahora en adelante, se denota por η (η_M) a cualquier homomorfismo de álgebras de A en $\mathbb{C}$.

Nota 5.1.4. *Sea M un ideal maximal. Si denotamos por π_M a la aplicación canónica*

$$\begin{aligned} \pi_M \colon A &\to A/M \\ x &\to \pi_M(x) := x + M (= \lambda 1_{A/M}) \end{aligned}$$

y denotamos por ϕ al isomorfismo isométrico, introducido en el lema 5.1.3, de A/M en $\mathbb{C}$ dado por $\phi(\lambda 1_{A/M}) = \phi(\lambda(1_A + M)) = \lambda$, entonces la aplicación composición $\eta_M := \phi \circ \pi_M$ dada como sigue

$$\begin{aligned} \eta_M \colon A &\xrightarrow{\pi_M} A/M \xrightarrow{\phi} \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow \lambda 1_{A/M} \to \lambda \end{aligned}$$

define un homomorfismo (epimorfismo) de álgebras de A en $\mathbb{C}$, continuo, de norma igual a 1 y con núcleo M. Veámoslo:
Es inmediato que η_M es un homomorfismo de álgebras; la continuidad en η_M se tiene porque, dado $x \in A$, $\eta_M(x) \cdot 1_{A/M} = x + M$ y $|\eta_M(x)| = \|\eta_M(x) \cdot 1_{A/M}\| = \|x + M\| = \|\pi_M(x)\| \leq \|x\|$

(nótese que $\|\pi_M\| = 1$; véase el lema 5.1.2); con esto anterior se deduce que $\|\eta_M\| \leq 1$. Además, como $\|1_A\| = 1$ y $|\eta_M(1_A)| = |1_{\mathbb{C}}| = 1$, se sigue que $\|\eta_M\| = 1$; para obtener el núcleo de η_M, basta tener en cuenta que, como $\phi^{-1}(0_{\mathbb{C}}) = 0_{A/M} = M$, entonces $\eta_M(x) = 0_{\mathbb{C}}$ si $\pi_M(x) = M$. Por tanto, $\eta_M^{-1}(0_{\mathbb{C}}) = M$.
En resumen, para cada $x \in A$ existe un único escalar $\eta_M(x) \in \mathbb{C}$ tal que $\pi_M(x) = x + M = \eta_M(x)(1_A + M)$. Dicho $\eta_M(x)$ es 'compartido' por los elementos de la misma clase $x + M$.

El resultado siguiente nos indica que todo homomorfismo (epimorfismo) de álgebras η de A en $\mathbb{C}$ con $M = \ker(\eta)$ es de la forma $\eta = \eta_M$, pues M es un ideal maximal.

Lema 5.1.4. *Todo homomorfismo de álgebras $\eta : A \to \mathbb{C}$ es continuo y satisface que $\|\eta\| = 1$. De hecho, si M es el núcleo de η, entonces M es un ideal maximal y $\eta = \eta_M$, siendo η_M la aplicación definida en la nota 5.1.4.*

Demostración. Sabemos, por teoría elemental de anillos, que el núcleo M de η es un ideal. Además, M es un ideal propio (si $M = A$, entonces $\eta(1_A) = 0_{\mathbb{C}}$, contradiciendo la definición de η), por lo que todos sus elementos son singulares. Veamos que η es continua. Se tiene, dado $x \in A$, que, como $\eta(x - \eta(x)1_A) = \eta(x) - \eta(x) \cdot \eta(1_A) = 0_{\mathbb{C}}$, se satisface que $x - \eta(x)1_A \in M$. Con ello, $x - \eta(x)1_A$, y en concreto $\eta(x)1_A - x$, es singular. Con esto, se deduce, aplicando el teorema 4.4.1, que $|\eta(x)| \leq \|x\|$ y, en definitiva, que η es un funcional lineal continuo tal que $\|\eta\| \leq 1$. De hecho, $\|\eta\| = 1$ ya que $\frac{|\eta(1_A)|}{\|1_A\|} = \frac{|1_{\mathbb{C}}|}{\|1_A\|} = 1$.
Veamos ahora que $\eta(x) = \eta_M(x)$ para todo $x \in A$. Fijemos $x \in A$. Como η es un epimorfismo de anillos se tiene, por el primer teorema de isomorfía, que A/M es isomorfo a $Im(\eta) = \mathbb{C}$. Con ello se sigue, por teoría elemental de anillos, que M es un ideal maximal de A. Por tanto, η_M existe y, como previamente habíamos visto que $x - \eta(x)1_A \in M$, se concluye que $\eta_M(x - \eta(x)1_A) = 0_{\mathbb{C}} = \eta_M(x) - \eta(x) \cdot \eta(1_A)$ y, en definitiva, $\eta_M(x) = \eta(x)$. □

Definición 5.1.2. *Llamamos **carácter** de A a cualquier homomorfismo (epimorfismo) de álgebras $\eta : A \to \mathbb{C}$.*

Lema 5.1.5. *La aplicación $M \mapsto \eta_M$ (siendo η_M definida como en en la nota 5.1.4), es una biyección entre entre el conjunto de todos los ideales maximales de A y el conjunto de los caracteres de A.*

Demostración. La sobreyectividad se tiene porque, aplicando el lema 5.1.4, todo carácter η es imagen de su respectivo núcleo M, que es maximal, esto es, $\eta = \eta_M$.
Consideremos ahora dos ideales maximales M_1 y M_2 y supongamos que $\eta_{M_1} = \eta_{M_2}$. Sabemos, por la nota 5.1.4, que M_1 tiene que ser núcleo de η_{M_1}, como también M_2 lo ha de ser de η_{M_2}, es decir, η_{M_1} tiene dos núcleos. Sin embargo, como el núcleo de cualquier aplicación lineal es único, tiene que ocurrir que $M_1 = M_2$. Por tanto, la aplicación $M \to \eta_M$ es inyectiva.

□

Nota 5.1.5. *Si denotamos por $\mathscr{X}$ al conjunto de caracteres de A, y por $\mathscr{M}$ al conjunto de ideales maximales de A, se tiene, por el lema 5.1.5, la siguiente igualdad:*

$$\begin{aligned} \mathscr{X} &= \{\eta : A \to \mathbb{C} : \eta \textit{ es un homomorfismo de álgebras}\} \\ &= \{\eta_M : M \in \mathscr{M}\} \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos, a partir del lema 5.1.4, que $\mathscr{X}$ es un subconjunto de la bola unidad cerrada en A', $\mathscr{X} \subset \mathscr{B} = \{f \in A' : \|f\| \leq 1\}$.

Pues bien, llamamos ***espacio de caracteres*** *al espacio* $\mathscr{X}$ *dotado de la topología débil-* heredada de* A', $\sigma(A', A)_{\mathscr{X}}$. *Con dicha topología* $\mathscr{X}$ *es Hausdorff (pues es subespacio de* A' *que es débil-* Hausdorff; véase la proposición 3.2.2). Asimismo, la topología del espacio de caracteres tiene la siguiente forma:*

$$\sigma(A', A)_{\mathscr{X}} = \{\mathscr{X} \cap U : U \in \sigma(A', A)\}.$$

Una base $\beta_{\mathscr{X}}$ *de* $\sigma(A', A)_{\mathscr{X}}$ *es la siguiente (véase la nota 3.2.4):*

$$\begin{aligned} \beta_{\mathscr{X}} &= \{\mathscr{X} \cap U_{x_1,\ldots x_k}(\eta; \epsilon) : k \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_k \in A, \eta \in \mathscr{X}, \epsilon > 0\} \\ &= \{\mathscr{X} \cap U_{x_1,\ldots x_k}(\eta_M; \epsilon) : k \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_k \in A, M \in \mathscr{M}, \epsilon > 0\}. \end{aligned}$$

El resultado que se enuncia a continuación es fundamental, pues nos garantiza que el espacio de caracteres $\mathscr{X}$ sea compacto, y que, como consecuencia, tenga sentido hablar del espacio de funciones continuas $C(\mathscr{X})$. Pues bien, para probar dicho resultado se utiliza como herramienta el hecho de que la bola unidad cerrada $\mathscr{B}$ sea compacta (cosa que es cierta cuando consideramos en A' la topología débil-*, como se vio en el teorema 3.2.2 de Banach-Alaoglu, pero que no es cierta por lo general si dotamos a A' de la topología inducida por la norma; véase la nota 3.2.6).

Lema 5.1.6. *El espacio de caracteres* $\mathscr{X}$ *de* A *es compacto (es decir, débil-* compacto).*

Demostración. Consideremos la bola unidad cerrada $\mathscr{B} = \{f \in A' : \|f\| \leq 1\}$ en A'. Sabemos, por el teorema 3.2.2, que $\mathscr{B}$ es débil-* compacto. Además, se tiene, por el lema 5.1.4, que todo carácter de A, $\eta \in \mathscr{X}$, es continuo con $\|\eta\| = 1$. Con ello $\mathscr{X} \subset \mathscr{B}$. Por tanto, bastará demostrar que $\mathscr{X}$ es débil-* cerrado para concluir su débil-* compacidad. Veámoslo: Sea (η_α) una red en $\mathscr{X}$ débil-* convergente a $\eta \in A'$ (véase la proposición 3.1.1). Tenemos que probar que $\eta \in \mathscr{X}$, es decir, que η es un homomorfismo de álgebras.
Por una parte, ya tenemos que η es lineal. Por otra parte se tiene, por construcción de $\sigma(A', A)$, que para todo $x \in A$ la aplicación $B_x(\eta) = \eta(x)$ es continua. Por tanto, como $\eta_\alpha \to \eta$ se sigue que, para todo $x \in A$, $\eta_\alpha(x) \to \eta(x)$ y, en particular, se deduce que

$$\eta(1_A) = \lim_\alpha \eta_\alpha(1_A) = \lim_\alpha 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}},$$

Además, si consideramos $x, y \in A$ cualesquiera, se satisface que

$$\eta(xy) = \lim_\alpha \eta_\alpha(xy) = \lim_\alpha \eta_\alpha(x) f_\alpha(y) = \lim_\alpha \eta_\alpha(x) \lim_\alpha \eta_\alpha(y) = \eta(x)\eta(y).$$

Por tanto, η es un homomorfismo de álgebras de A en $\mathbb{C}$. Con ello, hemos probado que $\mathscr{X}$ es un subconjunto débil-* cerrado de $\mathscr{B}$. Y, como $\mathscr{B}$ es un conjunto débil-* compacto, entonces $\mathscr{X}$ es débil-* compacto. □

Definición 5.1.3. *Llamamos* ***topología de Gel'fand*** *a la topología en* $\mathscr{M}$ *que convierte a la biyección de* $\mathscr{M}$ *en* $\mathscr{X}$, *descrita en el lema 5.1.5, en un homeomorfismo. Al espacio* $\mathscr{M}$ *dotado de la topología de Gel'fand lo denominamos* ***espacio de ideales maximales*** *de* A.

Nota 5.1.6. *Sabemos, a partir de la nota 5.1.5, que una base* $\beta_{\mathscr{X}}$ *de* $\mathscr{X}$ *es la colección*

$$\beta_{\mathscr{X}} = \{\mathscr{X} \cap U_{x_1,...x_k}(\eta_M; \epsilon) : k \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_k \in A, M \in \mathscr{M}, \epsilon > 0\}.$$

Por tanto, una base $\beta_{\mathscr{M}}$ *de* $\mathscr{M}$ *se construye calculando las contraimágenes de los elementos de* $\beta_{\mathscr{X}}$*, es decir, si tomamos* $\mathscr{X} \cap U_{x_1,...x_k}(\eta_{M_0}; \epsilon) \in \beta_{\mathscr{X}}$*, entonces un elemento de* $\beta_{\mathscr{M}}$ *es la contraimagen de dicho abierto:*

$$\{M \in \mathscr{M} : \eta_M \in \mathscr{X} \cap U_{x_1,...x_k}(\eta_{M_0}; \epsilon)\} = \{M \in \mathscr{M} : \eta_M \in U_{x_1,...x_k}(\eta_{M_0}; \epsilon)\}$$

y, más concretamente,

$$\{M \in \mathscr{M} : |\eta_M(x_1) - \eta_{M_0}(x_1)| < \epsilon, \; ..., \; |\eta_M(x_k) - \eta_{M_0}(x_k)| < \epsilon\}.$$

En resumen, una base del espacio de ideales maximales la conforma la colección siguiente:

$$\beta_{\mathscr{M}} = \bigcup_{U \in \beta_{\mathscr{X}}} \{\{M \in \mathscr{M} : \eta_M \in U\}\}$$

Nota 5.1.7. *El espacio topológico de ideales maximales* $\mathscr{M}$ *es un espacio compacto y Hausdorff. Esto se deduce del hecho de que* $\mathscr{M} \simeq \mathscr{X}$ *y que* $\mathscr{X}$ *es compacto y Hausdorff.*

Definición 5.1.4. *Sea* A *un álgebra de Gel'fand. Cada* $x \in A$ *determina una función* $\hat{x}$ *dada por*

$$\begin{aligned} \hat{x}\colon \mathscr{M} &\to \mathbb{C} \\ M &\to \hat{x}(M) := \eta_M(x). \end{aligned}$$

A la función $\hat{x}$ *la denominamos* ***transformada puntual de Gel'fand*** *de* x.

Nota 5.1.8. *Recordemos que la topología débil-* en* A' *es la topología más gruesa en* A' *que hace continuo al funcional lineal* $B_x : A' \to \mathbb{C}$ *para cada* $x \in A$ *(véase la definición 3.2.3). Como consecuencia, la restricción de* B_x *a* $\mathscr{X}$ *es continua con la topología* $\sigma(A', A)_{\mathscr{X}}$*, es decir, la aplicación*

$$\begin{aligned} B_x\big|_{\mathscr{X}}\colon \mathscr{X} &\to \mathbb{C} \\ \eta_M &\to B_x(\eta_M) = \eta_M(x) \end{aligned}$$

es continua para todo $x \in A$*. Pues bien, como* $\mathscr{X} \simeq \mathscr{M}$*, es inmediato que la transformada puntual de Gel'fand* $\hat{x}$ *es continua con la topología de Gel'fand, ya que* $\hat{x}$ *se puede reescribir como composición del homeomorfismo* $M \mapsto \eta_M$*, definido entre* $\mathscr{M}$ *y* $\mathscr{X}$*, con la aplicación* $B_x\big|_{\mathscr{X}}$*. Se tiene también que la topología de Gel'fand es la topología más gruesa sobre* $\mathscr{M}$ *que hace continuo a* $\hat{x}$ *para todo* $x \in A$ *(basta ver que para otra topología* τ' *sobre* $\mathscr{M}$ *que haga continua a* $\hat{x}$ *para todo* $x \in A$ *se tiene que todos los elementos de* $\beta_{\mathscr{M}}$ *están en* τ'*). Al conjunto de transformadas puntuales de Gel'fand (que es a su vez un subconjunto de* $C(\mathscr{M})$ *y que será el representante de* A *en* $C(\mathscr{M})$*) lo denotamos por*

$$\widehat{A} := \{\hat{x} : x \in A\}.$$

Nota 5.1.9. *Sean* X *e* Y *espacios topológicos compactos. Si* X *e* Y *son homeomorfos mediante una aplicación* $\Gamma : Y \to X$*, entonces se sigue que* $C(X)$ *y* $C(Y)$ *son isométricamente isomorfos como álgebras mediante una aplicación* Ω *dada por* $\Omega(f) := f \circ \Gamma$ *para cada* $f \in C(X)$ *(recíprocamente,* $\Omega^{-1}(g) := g \circ \Gamma^{-1}$*).*
Con esto se tiene que, como $\mathscr{X}$ *y* $\mathscr{M}$ *son espacios compactos homeomorfos,* $C(\mathscr{X})$ *y* $C(\mathscr{M})$ *son isométricamente isomorfos. Con lo cual, es factible replantear el teorema de representación de Gel'fand, enunciado a continuación, sustituyendo* $\mathscr{M}$ *por* $\mathscr{X}$ *(sin más que interpretar* $\hat{x}$ *como la aplicación* $B_x\big|_{\mathscr{X}}$ *descrita en la nota anterior).*

5.2. Teorema de representación de Gel'fand

Habiendo ya reunido la teoría necesaria en las secciones precedentes, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema de representación de Gel'fand. Gracias a éste veremos que, dado un álgebra de Gel'fand A, la aplicación que a cada $x \in A$ le asocia su transformada puntual de Gel'fand $\hat{x}$, define un homomorfismo de álgebras continuo de A en $C(\mathscr{M})$ (que, por lo general, no es ni inyectivo ni sobreyectivo). Y es mediante la imagen de A por dicho homomorfismo (esto es, $\widehat{A}$) que obtendremos una subálgebra normada con unidad de $C(\mathscr{M})$ y que actuará como representante de A. Representante cuya "calidad" podrá medirse a partir de las características adicionales que satisfaga el homomorfismo (véase la nota 5.2.1). Además, se estudiarán algunos ejemplos de representación, como es el relativo al álgebra del disco, $A = A(\overline{D_1})$, para el cual su representante se encuentra en $C(\mathscr{M}) \cong C(\overline{D_1})$. Para el desarrollo del teorema se ha seguido [2, p. 223-224].

Teorema 5.2.1. *(Teorema de representación de Gel'fand) Sean A un álgebra de Gel'fand y $\mathscr{M}$ el espacio de ideales maximales de A. Se tiene lo siguiente:*

1. *El rango de $\hat{x}$ coincide con $\sigma(x)$ para todo $x \in A$.*
2. *$\widehat{A}$ es una subálgebra normada de $C(\mathscr{M})$ con unidad $1_{C(\mathscr{M})} = \widehat{1_A} \equiv 1_{\mathbb{C}}$ (y neutro para la suma $0_{C(\mathscr{M})} = \widehat{0_A} \equiv 0_{\mathbb{C}}$).*
3. *La aplicación de A en $C(\mathscr{M})$ dada por $x \mapsto \hat{x}$ define un homomorfismo de álgebras.*
4. *La norma supremo de $\hat{x}$ satisface que $\|\hat{x}\| = r(x) \leq \|x\|$ para todo $x \in A$. Con ello, el homomorfismo $x \mapsto \hat{x}$ es continuo. Además, su norma es igual a 1.*
5. *El núcleo del homomorfismo $x \mapsto \hat{x}$ es la intersección de todos los ideales maximales de A. También coincide con el conjunto de todos los $x \in A$ tales que $\sigma(x) = \{0_{\mathbb{C}}\}$.*
6. *Si M_1, M_2 son dos ideales maximales distintos, entonces existe $x \in A$ de tal manera que $\hat{x}(M_1) \neq \hat{x}(M_2)$.*

Demostración. 1) Veamos que $\sigma(x)$ está contenido en el rango de $\hat{x}$:
Sea $\lambda \in \sigma(x)$. Se tiene que $\lambda 1_A - x \in A \backslash U(A)$ y, por tanto, que el ideal principal $(\lambda 1_A - x)$ es propio (de lo contrario, existiría $r \in A$ tal que $z \cdot r = 1_A \in (\lambda 1_A - x)$, con $z = \lambda 1_A - x$). Ahora, por el lema de Zorn, existe un ideal maximal M tal que $(\lambda 1_A - x) \subset M$. Y, al satisfacerse que $\lambda 1_A - x \in M$, se sigue que

$$\widehat{\lambda 1_A - x}(M) = \eta_M(\lambda 1_A - x) = 0_{\mathbb{C}}.$$

Además, como se cumple para todo $M \in \mathscr{M}$ que

$$\widehat{\lambda 1_A - x}(M) = \lambda \eta_M(1_A) - \eta_M(x) = \lambda 1_{\mathbb{C}} - \hat{x}(M),$$

se sigue que $\hat{x}(M) = \lambda$. Para probar la otra contención basta proceder de modo inverso.

2) Veamos inicialmente que $\widehat{A}$ es una subálgebra normada de $C(\mathscr{M})$:
En primer lugar, sabemos, por la nota 5.1.7, que el espacio $\mathscr{M}$ es compacto. Por ello, $C(\mathscr{M})$ es un álgebra de Gel'fand con la norma y operaciones del ejemplo 4.2.2. Además, es inmediato que $\widehat{A} \subset C(\mathscr{M})$ ya que, por la nota 5.1.8, $\hat{x}$ es continua para todo $x \in A$.
Probemos ahora que $\widehat{A}$ es también un subespacio vectorial de $C(\mathscr{M})$. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, x, y \in A$.

Se tiene, atendiendo a la definición de las operaciones en $C(\mathscr{M})$ y a la linealidad para cada $M \in \mathscr{M}$ de la aplicación η_M, que

$$\begin{aligned}(\lambda\hat{x} + \mu\hat{y})(M) &= \lambda\hat{x}(M) + \mu\hat{y}(M)\\ &= \lambda\eta_M(x) + \mu\eta_M(y)\\ &= \eta_M(\lambda x + \mu y)\\ &= \hat{z}(M),\end{aligned}$$

con $z = \lambda x + \mu y \in A$. Por tanto, $\widehat{A}$ es un subespacio vectorial de $C(\mathscr{M})$.
Comprobemos ahora que, dados $x, y \in A$ cualesquiera, la operación producto es interna. Se tiene, para todo $M \in \mathscr{M}$, que

$$\begin{aligned}(\hat{x}\hat{y})(M) &= \hat{x}(M)\hat{y}(M)\\ &= \eta_M(x)\eta_M(y)\\ &= \eta_M(xy)\\ &= \widehat{xy}(M),\end{aligned}$$

siendo $xy \in A$. Así, se concluye que la operación producto es interna. Con esto, se sigue que $\widehat{A}$ es una subálgebra de $C(\mathscr{M})$. Además, el carácter normado de $\widehat{A}$ se deduce a partir de la inclusión $\widehat{A} \subset C(\mathscr{M})$ y teniendo en cuenta que $C(\mathscr{M})$ es un álgebra normada.

Veamos ahora cuál es la unidad de $\widehat{A}$. Sea $g \in C(\mathscr{M})$. Se tiene que la aplicación

$$\begin{aligned}\widehat{1_A}\colon \mathscr{M} &\to \mathbb{C}\\ M &\to \eta_M(1_A) = 1_{\mathbb{C}},\end{aligned}$$

satisface que $(\widehat{1_A} \cdot g)(M) = (g \cdot \widehat{1_A})(M) = \widehat{1_A}(M) \cdot g(M) = 1_{\mathbb{C}} \cdot g(M) = g(M)$ para todo $M \in \mathscr{M}$. Por consiguiente, $\widehat{1_A}$ es la unidad de $C(\mathscr{M})$ y, en definitiva, de $\widehat{A}$.
Para finalizar, veamos cuál es el elemento neutro para la suma:
Sea $g \in C(\mathscr{M})$. Se tiene que la aplicación

$$\begin{aligned}\widehat{0_A}\colon \mathscr{M} &\to \mathbb{C}\\ M &\to \eta_M(0_A) = 0_{\mathbb{C}},\end{aligned}$$

satisface que $(\widehat{0_A} + g)(M) = (g + \widehat{0_A})(M) = \widehat{0_A}(M) + g(M) = 0_{\mathbb{C}} + g(M) = g(M)$ para todo $M \in \mathscr{M}$. Por consiguiente, $\widehat{0_A}$ es el elemento neutro para la suma de $C(\mathscr{M})$ y, por tanto, de $\widehat{A}$.

3) Es sencillo comprobar, sin más que proceder de modo análogo al apartado 2, que la aplicación $x \mapsto \hat{x}$ satisface, dados $x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, que $\widehat{x+y}(M) = \hat{x}(M) + \hat{y}(M)$, $\widehat{xy}(M) = \hat{x}(M) \cdot \hat{y}(M)$ y $\widehat{\lambda x}(M) = \lambda\hat{x}(M)$ para todo $M \in \mathscr{M}$. También se ve de manera análoga que $\widehat{1_A} = 1_{C(\mathscr{M})}$. Por lo tanto, la aplicación $x \mapsto \hat{x}$ define un homomorfismo de álgebras.

4) Tenemos, en virtud de la definición 4.4.3 y el apartado 1, que dado $x \in A$ se satisface que

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\| &= \sup\{|\hat{x}(M)| : M \in \mathscr{M}\} \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = r(x) \leq \|x\|. \end{aligned}$$

Con esto probamos que $\|\hat{x}\| \leq 1 \cdot \|x\|$ para todo $x \in A$, es decir, que el operador lineal $x \mapsto \hat{x}$ está acotado o, equivalentemente, es continuo y tiene norma a lo sumo 1. Además, como $\frac{\|\widehat{1_A}\|}{\|1_A\|} = 1$, se sigue que el homomorfismo descrito tiene norma igual a 1.

5) El núcleo de la aplicación de Gel'fand coincide con el conjunto siguiente

$$\begin{aligned} \{x \in A : \hat{x} = 0_{C(\mathscr{M})}\} &= \{x \in A : \hat{x} = \widehat{0_A}\} \\ &= \{x \in A : \hat{x}(M) = 0_{\mathbb{C}} \text{ para todo } M \in \mathscr{M}\} \\ &= \{x \in A : \eta_M(x) = 0_{\mathbb{C}} \text{ para todo } M \in \mathscr{M}\} \\ &= \{x \in A : x \in M \text{ para todo } M \in \mathscr{M}\} \\ &= \bigcap_{M \in \mathscr{M}} M, \end{aligned}$$

pero también, y en virtud del apartado 1, con el conjunto

$$\{x \in A : \hat{x} = 0_{C(\mathscr{M})}\} = \{x \in A : \hat{x}(M) = 0_{\mathbb{C}} \text{ para todo } M \in \mathscr{M}\} = \{x \in A : \sigma(x) = \{0_{\mathbb{C}}\}\}.$$

6) Sean $M_1, M_2 \in \mathscr{M}$, $M_1 \neq M_2$. Supongamos que, por el contrario, no existe $x \in A$ tal que $\hat{x}(M_1) \neq \hat{x}(M_2)$, es decir, que $\hat{x}(M_1) = \hat{x}(M_2)$ para todo $x \in A$. Esto es equivalente a que $\eta_{M_1}(x) = \eta_{M_2}(x)$ para todo $x \in A$, es decir, que $\eta_{M_1} = \eta_{M_2}$. Con esto, tenemos que tanto M_1 como M_2 son núcleos de la aplicación η_{M_1}, y, como el núcleo es necesariamente único, deducimos que $M_1 = M_2$. Por lo tanto, concluimos que tiene que existir al menos un $x \in A$ tal que $\hat{x}(M_1) \neq \hat{x}(M_2)$

□

Definición 5.2.1. *Al homomorfismo de álgebras de A en $C(\mathscr{M})$ dado por $x \mapsto \hat{x}$ descrito en el teorema anterior lo denominamos **transformada de Gel'fand**.*

Nota 5.2.1. *Nótese que, si la transformada de Gel'fand es inyectiva, entonces se tiene que A y $\widehat{A}$ son isomorfos como álgebras. Si la transformada de Gel'fand define además una isometría, entonces se obtiene el caso óptimo, puesto que tanto A como $\widehat{A}$ son isométricamente isomorfos como álgebras y además son homeomorfos como espacios topológicos (como $\|x\| = \|\hat{x}\|$ para todo $x \in A$, se sigue que tanto la transformada, como su inversa son aplicaciones lineales acotadas y, por tanto, continuas; $\|x\| \leq \|\hat{x}\|$ y $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$ para todo $x \in A$).*

Nota 5.2.2. *Aunque no sea objeto de estudio en este trabajo, cabe indicar que si A hubiera sido desde el principio un álgebra de Banach conmutativa sin unidad, entonces $\mathscr{M}$ no hubiera sido un espacio compacto sino localmente compacto.*

Sabemos que, dado un álgebra de Gel'fand A, existe una homeomorfismo entre el espacio de ideales maximales $\mathscr{M}$ y el espacio de caracteres $\mathscr{X}$. Es por ello que, aunque no conozcamos en primera instancia qué forma tiene $\mathscr{M}$, una manera eficaz de obtener todos los ideales maximales consistirá, en primer lugar, en localizar todos y cada uno de los homomorfismos de álgebras $\eta : A \to \mathbb{C}$ y, en segundo lugar, en calcular los núcleos de dichos homomorfismos, que son ideales maximales.

También, sería acertado pensar que, si X es un espacio topológico compacto y Hausdorff, entonces, dado $A = C(X)$, se tiene que $\mathscr{M} \simeq X$ y que la representación de Gel'fand de A en el espacio $C(\mathscr{M})$ es justamente $\widehat{A} = C(\mathscr{M})$. Pues bien, en el siguiente resultado vamos a ver que, efectivamente, así ocurre (véase [5]):

Corolario 5.2.1. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico compacto y Hausdorff. El espacio de funciones continuas $C(X)$ (que, por el ejemplo 4.2.2, sabemos que es un álgebra de Gel'fand) satisface lo siguiente:*

1. *$\mathscr{M} = \{M_x : x \in X\}$, siendo $M_x := \{f \in C(X) : f(x) = 0_{\mathbb{C}}\}$ el núcleo del homomorfismo de álgebras*

$$\begin{aligned} \eta_x \colon C(X) &\to \mathbb{C} \\ f &\to \eta_x(f) := f(x), \end{aligned}$$

   para todo $x \in X$. En consecuencia, $\mathscr{X} = \{\eta_x : x \in X\}$.

2. *X es homeomorfo a $\mathscr{M} \simeq \mathscr{X}$.*

3. *La transformada de Gel'fand, dada por $f \to \hat{f}$ para todo $f \in C(X)$, define un isomorfismo isométrico de álgebras de $C(X)$ en $C(\mathscr{M})$. Por tanto, $C(X) \cong \widehat{C(X)} = C(\mathscr{M})$.*

Demostración. 1) Veamos que η_x define un homomorfismo de álgebras (y que, por tanto, su núcleo pertenece a $\mathscr{M}$). Se tiene, dados $f, f' \in C(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, que, por definición de $C(X)$, $\eta_x(f+f') = (f+f')(x) = f(x)+f'(x) = \eta_x(f)+\eta_x(f')$, que $\eta_x(ff') = (ff')(x) = f(x)f'(x) = \eta_x(f)\eta_x(f')$, que $\eta_x(1_{C(X)}) = 1_{C(X)}(x) = 1_{\mathbb{C}}$ y que $\eta_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \eta_x(f)$. Con ello, se satisface, aplicando el lema 5.1.4, que

$$M_x = \ker(\eta_x) = \{f \in C(X) : f(x) = 0_{\mathbb{C}}\}$$

es un ideal maximal. En resumen, dado $x \in X$, hemos encontrado, primero, un homomorfismo de álgebras $\eta_x \in \mathscr{X}$ y, segundo, un ideal maximal $M_x \in \mathscr{M}$ de $C(X)$ a partir de su núcleo. Ahora, el siguiente paso consiste en verificar que se tiene la igualdad $\mathscr{M} = \{M_x : x \in X\}$. Si definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \nu \colon X &\to \mathscr{M} \\ x &\to \nu(x) := M_x, \end{aligned}$$

entonces bastaría ver que ν es sobreyectiva para probar que $\mathscr{M} = \{M_x : x \in X\}$. No obstante, dicha aplicación define una biyección. Comprobemos, en primera instancia, que ν es inyectiva. Para ello, supongamos, dados $x, x' \in X$, que $\nu(x) = \nu(x')$, es decir, que

$$M_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0_{\mathbb{C}}\} = M_{x'} = \{f \in C(X) : f(x') = 0_{\mathbb{C}}\}.$$

Se tiene, por tanto, que para todo $f \in M_x$ se cumple que $f \in M_{x'}$, es decir, $f(x) = 0_{\mathbb{C}}$ y $f(x') = 0_{\mathbb{C}}$. Asimismo, se satisface que, como X es compacto y Hausdorff, X es un espacio T_4 (y, por tanto, completamente regular), y, por ello, dado cualquier cerrado C tal que $x' \in C$ y $x \notin C$ (dicho cerrado existe ya que X es Hausdorff), existe una función continua $f_{x,C} : X \to [0,1]$ tal que $f_{x,C}(x) = 0_{\mathbb{C}}$ y $f_{x,C}(x'') = 1_{\mathbb{C}} \neq 0_{\mathbb{C}}$ para todo $x'' \in C$. Por tanto, hemos encontrado $f_{x,C} \in C(X)$ tal que $f_{x,C} \in M_x$ pero $f_{x,C} \notin M_{x'}$ (ya que, $f_{x,C}(x') = 1$). En consecuencia, la igualdad $M_x = M_{x'}$ solo se satisface cuando $x = x'$, luego ν es inyectiva.

Veamos ahora que ν es una aplicación sobreyectiva. Para ello, supongamos lo contrario, es decir, que existe $M \in \mathscr{M}$ para el cual no existe $x \in X$ tal que $M = M_x$, esto es, para todo $x \in X$ existe $f_x \in M$ tal que $f_x(x) \neq 0_{\mathbb{C}}$ (recordemos que $M_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0_{\mathbb{C}}\}$). Fijemos pues $x \in X$. Se tiene, por ser $\mathbb{C}$ Hausdorff, que existe $V_x \in \tau_u$ tal que $f_x(x) \in V_x$ y $0_{\mathbb{C}} \notin V_x$. Con ello, y como f_x es continua, existe un abierto

$$U_x := f_x^{-1}(V_x) \in \tau_X$$

tal que $x \in U_x$ y $f_x(x'') \neq 0_{\mathbb{C}}$ para todo $x'' \in U_x$. Ahora, si hacemos variar $x \in X$ podemos obtener un recubrimiento $\{U_x\}_{x \in X}$ de abiertos de X. Y, como X es compacto, existen $x_1, ..., x_k \in X$ tales que $U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_k} = X$. Sean pues $f_{x_1}, ..., f_{x_k}$ las respectivas funciones en M. Se tiene, por ser M un ideal, que, dado $j \in \{1, ..., k\}$, $f_{x_j} f' \in M$ para todo $f' \in C(X)$. Con ello, se sigue que la suma de funciones pertenecientes a M dada por

$$s(x) := \sum_{j=1}^{k} f_{x_j}(x)\overline{f_{x_j}}(x) = \sum_{j=1}^{k} |f_{x_j}(x)|^2 \text{ para todo } x \in X,$$

pertenece a su vez a M. Además, se tiene, por construcción, que $s(x) > 0_{\mathbb{C}}$ para todo $x \in X$ (la no nulidad se deduce del hecho de que, si $y \in X$, entonces existe $j_0 \in \{1, ..., k\}$ tal que $y \in U_{x_{j_0}}$ y, como $0_{\mathbb{C}} \notin f_{x_{j_0}}(U_{j_0})$, se sigue que $f_{x_{j_0}}(y) \neq 0_{\mathbb{C}}$ y, en definitiva, que $s(y) \geq f_{x_{j_0}}(x) \cdot \overline{f_{x_{j_0}}}(y) \neq 0_{\mathbb{C}}$).
Ahora, consideremos la función $(1/s)(x) := 1/s(x)$ para todo $x \in X$ (está bien definida porque $s(x) > 0_{\mathbb{C}}$ para todo $x \in X$). Se comprueba que $1/s \in C(X)$. Se tiene, por definición de ideal, que $1_{C(X)} = s \cdot 1/s \in M$ y, por tanto, que $M = C(X)$, lo que es absurdo. Concluimos así que ν es sobreyectiva y, en definitiva, que ν es biyectiva. Por tanto, $\mathscr{M} = \{M_x : x \in X\}$ y $\mathscr{X} = \{\eta_x : x \in X\}$.

2) A continuación, vamos a probar que X y $\mathscr{X} \simeq \mathscr{M}$ son homeomorfos. Sabemos que X es compacto y que $\mathscr{X}$ es débil-* Hausdorff. Por lo tanto, basta ver que la biyección $\nu : X \to \mathscr{X}$ dada por $\nu(x) = \eta_x$ define una aplicación continua para concluir que X y $\mathscr{X}$ son homeomorfos. Veámoslo:
Fijemos $y \in X$ y consideremos una red cualquiera $(y_\alpha)_\alpha$ en X tal que $y_\alpha \to y$. Tenemos que probar que $\nu(y_\alpha) \to \nu(y)$, es decir, que $\eta_{y_\alpha} \to \eta_y$ (véase la proposición 3.1.2), para poder concluir que ν es continua en $y \in X$. Sea pues un abierto U en $\mathscr{X}$ con $\eta_y \in U$. Dados $f_1, ..., f_k \in C(X)$, $\epsilon > 0$, el abierto U tiene, sin pérdida de generalidad, la siguiente forma:

$$\begin{aligned} U &= \mathscr{X} \cap U_{f_1,...,f_k}(\eta_y; \epsilon) \\ &= \{\eta_x \in \mathscr{X} : |\eta_x(f_1) - \eta_y(f_1)| < \epsilon, ..., |\eta_x(f_k) - \eta_y(f_k)| < \epsilon\} \\ &= \{\eta_x \in \mathscr{X} : |f_1(x) - f_1(y)| < \epsilon, ..., |f_k(x) - f_k(y)| < \epsilon\} \end{aligned}$$

(véase la nota 5.1.5). Pues bien, tenemos que encontrar α_U tal que $\eta_{y_\alpha} \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha_U$, esto es, tenemos que encontrar α_U tal que se satisfaga lo siguiente para todo $\alpha \geq \alpha_U$:

$$|\eta_{y_\alpha}(f_j) - \eta_y(f_j)| = |f_j(y_\alpha) - f_j(y)| < \epsilon \text{ para cada } j \in \{1, ..., k\}. \quad (1)$$

Sea $j \in \{1, ..., k\}$. La función $f_j \in C(X)$ es continua. Por ello, se sigue que, como $y_\alpha \to y$, se cumple que $f_j(y_\alpha) \to f_j(y)$. Por tanto, si consideramos el abierto $B(f_j(y); \epsilon)$ centrado en $f_j(y)$, existe α_j tal que $f_j(y_\alpha) \in B(f_j(y); \epsilon)$ para todo $\alpha \geq \alpha_j$, es decir, existe α_j tal que $|f_j(y_\alpha) - f_j(y)| < \epsilon$ para todo $\alpha \geq \alpha_j$. Así, haciendo variar $j \in \{1, ..., k\}$, obtenemos los $\alpha_1, ..., \alpha_k$ respectivos a los k posibles casos. Finalmente, si consideramos

$$\alpha_U = \text{máx}\{\alpha_1, ..., \alpha_k\},$$

es evidente que se satisface (1) y, en definitiva, que $\eta_{y_\alpha} \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha_U$. Así, $\eta_{y_\alpha} \to \eta_y$ y, con ello, concluimos que ν es una aplicación continua en y. Variando $y \in X$ se sigue que ν es continua es X. Con esto, ν es un homeomorfismo.

3) Hemos visto en el apartado anterior que $X \simeq \mathscr{M}$. Con esto, se concluye que la transformada de Gel'fand define un isomorfismo isométrico de álgebras (considerando el homeomorfismo $\nu^{-1} : \mathscr{X} \to X$ definido en el apartado 1, se tiene, siguiendo la notación dada en la nota 5.1.9, que $X = X$, $Y = \mathscr{X}$, $\Gamma = \nu^{-1}$ y $\Omega(f) = f \circ \Gamma$; Ω es un isomorfismo isométrico de álgebras y $\hat{f} = \Omega(f)$ para todo $f \in C(X)$).

$\square$

Nota 5.2.3. *Nótese que, si consideramos el espacio de funciones acotadas $C_b(X)$ donde X es un espacio Tychonoff, entonces, repitiendo paso a paso la demostración llevada a cabo en el apartado 1 del corolario anterior, se tiene, por ser X completamente regular, que existe una aplicación inyectiva de X en $\mathscr{M}$ cuya imagen es $\{M_x : x \in X\} \subset \mathscr{M}$. No obstante, como ahora X no es compacto, no es factible repetir el mecanismo del corolario anterior relativo a la sobreyectividad y, en consecuencia, no se puede asegurar que exista un homeomorfismo entre X y $\mathscr{M}$. Pues bien, sí que sabemos, por el apartado 5 del teorema de representación, que el núcleo de la transformada de Gel'fand $f \mapsto \hat{f}$ es la intersección de todos los ideales maximales de $C_b(X)$. Y, como*

$$\bigcap_{M \in \mathscr{M}} M \subset \bigcap_{x \in X} M_x = \{f \in C_b(X) : f(x) = 0_{\mathbb{C}} \text{ para todo } x \in X\} = \{0_{C_b(X)}\},$$

se deduce que la transformada de Gel'fand es inyectiva. Por consiguiente, $A = C_b(X)$ es isomorfo como álgebra a $\widehat{A}$, su representante en $C(\mathscr{M})$.
En este caso, y aunque quede fuera de nuestros contenidos, se tiene que el espacio de ideales maximales $\mathscr{M}$ de $A = C_b(X)$ es un espacio compacto tal que $\widehat{A}$ es denso en $\mathscr{M}$. A $\mathscr{M}$ se le denomina ***compactificación de Stone-Cech*** *de X y se le denota por βX. Un ejemplo de ello se da para $X = \mathbb{N}$. Aquí, $\mathscr{M} = \beta\mathbb{N}$ y $l^\infty = C_b(\mathbb{N}) \cong C(\beta\mathbb{N})$.*

Nota 5.2.4. *Nótese que, si X es un espacio topológico compacto que no es Hausdorff, entonces no podemos garantizar que X y $\mathscr{M}$ sean homeomorfos. Únicamente sabemos que X tiene como mínimo 2 elementos y que, como por la compacidad de X la aplicación ν del corolario anterior es sobreyectiva, $\mathscr{M} = \{M_x : x \in X\}$.*
El caso extremo se da cuando toda función en $C(X)$ es constante. En dicho caso, se tiene, dado $x_0 \in X$, que $\mathscr{M} = \{M_{x_0}\} = \{\{0_{C(X)}\}\}$ y, por tanto, que $X \not\simeq \mathscr{M}$. No obstante, $C(X)$ y $C(\mathscr{M})$ son isométricamente isomorfos. La inyectividad se tiene porque el núcleo de la transformada de Gel'fand es la intersección de todos los ideales maximales, es decir, $\{0_{C(X)}\}$. Asimismo, la sobreyectividad se sigue porque, dado $g \in C(\mathscr{M})$ con $g(\{0_{C(X)}\}) = k \in \mathbb{C}$, se tiene que $g = \hat{f}$ con $f \equiv k$, ya que $\hat{f}(\{0_{C(X)}\}) = \eta(f) = f(x_0) = k$ (el único homomorfismo posible $\eta : C(X) \to \mathbb{C}$ en $\mathscr{X}$ es el dado por $\eta(f) = f(x_0)$ para todo $f \in C(X)$). El carácter isométrico se deduce porque $\|f\| = |f(x_0)| = \|\hat{f}\|$ para todo $f \in C(X)$.

Corolario 5.2.2. *Sea $A(\overline{D_1})$ el álgebra del disco (que, por el ejemplo 4.2.7, sabemos que es un álgebra de Gel'fand). Se tiene que (véase [5]):*

1. *$\mathscr{M} = \{M_z : z \in \overline{D_1}\}$, siendo $M_z := \{f \in A(\overline{D_1}) : f(z) = 0_{\mathbb{C}}\}$ el núcleo del homomorfismo de álgebras*

$$\begin{aligned} \eta_z \colon A(\overline{D_1}) &\to \mathbb{C} \\ f &\to \eta_z(f) := f(z), \end{aligned}$$

para todo $z \in \overline{D_1}$. En consecuencia, $\mathscr{X} = \{\eta_z : z \in \overline{D_1}\}$.

2. *$\overline{D_1}$ es homeomorfo a $\mathscr{X} \simeq \mathscr{M}$.*

3. *La transformada de Gel'fand, dada por $f \to \hat{f}$ para todo $f \in C(X)$, define un monomorfismo isométrico de álgebras de $A(\overline{D_1})$ en $C(\mathscr{M}) \cong C(\overline{D_1})$. Por lo tanto, $A(\overline{D_1}) \cong \widehat{A(\overline{D_1})}$ y, con ello, $A(\overline{D_1})$ se puede interpretar como una subálgebra de $C(\overline{D_1})$.*

Demostración. 1) En analogía con el apartado 1 del corolario anterior se tiene que η_z define un homomorfismo de álgebras de $A(\overline{D_1})$ en $\mathbb{C}$. Establezcamos la aplicación

$$\begin{aligned} \nu \colon \overline{D_1} &\to \mathscr{X} \\ z &\to \nu(z) := \eta_z, \end{aligned}$$

siendo $\eta_z(f) = f(z)$ para todo $f \in A(\overline{D_1})$. Se tiene que ν es inyectiva (si suponemos, dados $z_1, z_2 \in \overline{D_1}, z_1 \neq z_2$, que $\eta_{z_1} = \eta_{z_2}$, se sigue que $M_{z_1} = M_{z_2}$, pero para $g(z) = z - z_1, z \in \overline{D_1}$, se tiene que $g \in M_1$ y que $g \notin M_2$, luego obligatoriamente $z_1 = z_2$). Comprobemos ahora que la aplicación ν es sobreyectiva. Sea $\eta \in \mathscr{X}$. Tenemos que encontrar $z \in \overline{D_1}$ tal que $\nu(z) = \eta$. Pues bien, veamos que si h es la aplicación de $\overline{D_1}$ en $\overline{D_1}$ dada por $h(z) := z$ para todo $z \in \overline{D_1}$ ($h \in A(\overline{D_1})$), entonces η será justamente la aplicación $\eta = \eta_\zeta = \nu(\zeta)$ con

$$\zeta := \eta(h),$$

es decir, veremos que $\eta(f) = \eta_\zeta(f) = f(\zeta)$ para todo $f \in A(\overline{D_1})$.
Fijemos pues $f \in A(\overline{D_1})$ y definamos, dados $0 < r < 1$ y $D_r := B(0_{\mathbb{C}}; 1/r)$, la aplicación siguiente:

$$\begin{aligned} f_r \colon \overline{D_r} &\to \mathbb{C} \\ z &\to f_r(z) := f(rz). \end{aligned}$$

Dicha aplicación está bien definida porque, dado $z \in \overline{D_r}$ se tiene que $|rz| = |r||z| \leq 1$ y, por tanto, $f(rz)$ existe. Además, f_r es continua en $\overline{D_r}$ y analítica en D_r (ya que es composición de la aplicación polinómica de $\overline{D_r}$ en $\overline{D_1}$ dada por $z \mapsto rz$ con la aplicación f). Por tanto, $f_r|_{\overline{D_1}} \in A(\overline{D_1})$. Ahora, como f_r es analítica en D_r, f_r se puede representar por una serie de potencias (el desarrollo de Taylor) en D_r centrada en $z_0 = 0_{\mathbb{C}}$ de la forma

$$f_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,r} z^n, \text{ siendo } \ a_{n,r} = \frac{1}{n!} f_r^{(n)}(0_{\mathbb{C}}).$$

Dicha serie converge cuasi-uniformemente en D_r. Por ello, se tiene que, si consideramos el compacto $\overline{D_1} \subset D_r$, entonces la serie converge uniformemente en $\overline{D_1}$, esto es, que para cada

$\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sum_{n=0}^{m} a_{n,r} z^n - f_r(z)| < \epsilon \qquad (1)$$

para todo $z \in \overline{D_1}$ y para todo $m \geq N_\epsilon$. Con ello, si definimos la aplicación $f_{m,r} : \overline{D_1} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f_{m,r}(z) := \sum_{n=0}^{m} a_{n,r} z^n = \sum_{n=0}^{m} a_{n,r} h(z)^n \quad \text{para cada } z \in \overline{D_1}$$

(función que, por ser polinómica, está en el álgebra del disco), entonces se tiene por (1) que para cada $\epsilon > 0$ existe N_ϵ tal que

$$\|f_{m,r} - f_r|_{\overline{D_1}}\| = \sup_{z \in \overline{D_1}} |f_{m,r}(z) - f_r|_{\overline{D_1}}(z)| \leq \epsilon$$

para todo $m \geq N_\epsilon$, esto es, $f_{m,r} \to f_r|_{\overline{D_1}}$ cuando $m \to \infty$. Ahora, como η es una aplicación continua, se sigue que $\eta(f_{m,r}) \to \eta(f_r|_{\overline{D_1}})$ cuando $m \to \infty$, es decir,

$$\begin{aligned}
\eta(f_r|_{\overline{D_1}}) &= \lim_m \eta(f_{m,r}) \\
&= \lim_m \eta\left(\sum_{n=0}^{m} a_{n,r} h^n\right) \\
&= \lim_m \sum_{n=0}^{m} a_{n,r} \eta(h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,r} \zeta^n = f_r(\zeta) = f_r|_{\overline{D_1}}(\zeta) \qquad (2)
\end{aligned}$$

(la última igualdad se tiene porque, como por el lema 5.1.4 $\|\eta\| = 1$ y por construcción de norma supremo $\|h\| = 1$, se satisface que $|\eta(h)| = |\zeta| \leq \|\eta\|\|h\| = 1$ y, en definitiva, que $\zeta \in \overline{D_1}$). En resumen, dado $0 < r < 1$, hemos encontrado f_r tal que $f_r|_{\overline{D_1}} \in A(\overline{D_1})$ y $\eta(f_r|_{\overline{D_1}}) = f_r|_{\overline{D_1}}(\zeta)$.
Ahora, como f es continua en el compacto $\overline{D_1}$, se sigue, por el teorema de Heine-Cantor, que f es uniformemente continua en $\overline{D_1}$. Por tanto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$ para todo $z, w \in \overline{D_1}$ con $|z - w| < \delta$. Con ello, si consideramos $0 < r < 1$ tal que $|1 - r| < \delta$, entonces se satisface para todo $z \in \overline{D_1}$ y $w = rz \in \overline{D_1}$ que

$$|f(z) - f(rz)| < \epsilon$$

(ya que $|z - rz| = |z||1 - r| \leq |1 - r| < \delta$). Por consiguiente, se tiene que

$$\sup_{z \in \overline{D_1}} |f(z) - f(rz)| \leq \epsilon$$

para todo $r \in (0, 1)$ tal que $|1 - r| < \delta$ y, con esto, concluimos que

$$\lim_{r \to 1} \|f - f_r|_{\overline{D_1}}\| = \lim_{r \to 1} \left(\sup_{z \in \overline{D_1}} |f(z) - f(rz)|\right) = 0,$$

es decir, que $f_r|_{\overline{D_1}} \to f$ converge en $A(\overline{D_1})$ cuando $r \to 1$.
Ahora, como se tiene, por un lado y por la continuidad de η en $A(\overline{D_1})$ (véase el lema 5.1.4),

que $\eta(f_r|_{\overline{D_1}}) \to \eta(f)$ cuando $r \to 1$; por otro lado y aplicando (2), que $\eta(f_r|_{\overline{D_1}}) = f_r|_{\overline{D_1}}(\zeta)$; y, en último lugar, que f es continua, llegamos a lo siguiente:

$$\begin{aligned}\eta(f) &= \lim_{r\to 1} \eta(f_r|_{\overline{D_1}}) \\ &= \lim_{r\to 1} f_r|_{\overline{D_1}}(\zeta) \\ &= \lim_{r\to 1} f(r\zeta) = f(\zeta) = \eta_\zeta(f).\end{aligned}$$

Con esto, se concluye que η es de la forma η_z con $z = \eta(h) = \zeta \in \overline{D_1}$ y, en definitiva, que ν es sobreyectiva. Por consiguiente, ν es una aplicación biyectiva de $\overline{D_1}$ en $\mathscr{X} \simeq \mathscr{M}$ y $\mathscr{X} = \{\eta_z : z \in \overline{D_1}\}$, $\mathscr{M} = \{M_z : z \in \overline{D_1}\}$.

2) Sabemos que $\overline{D_1}$ es compacto y que $\mathscr{X}$ es Hausdorff. Por tanto, hay que probar que la biyección ν define, además, una aplicación continua para así poder concluir que $\overline{D_1}$ y $\mathscr{X}$ son homeomorfos. Pues bien, para ver que, efectivamente ν es continua, basta proceder de modo análogo al apartado 2 del corolario anterior (con la peculiaridad de que ahora no hace falta utilizar redes para estudiar la continuidad sino sucesiones; $\overline{D_1}$ es homeomorfo a un espacio métrico con la distancia usual, esto es, es un espacio metrizable).

3) Hemos visto en el apartado anterior que $\overline{D_1} \simeq \mathscr{M}$. Por consiguiente, se sigue que $C(\overline{D_1}) \cong C(\mathscr{M})$ (véase la nota 5.1.9). Por otro lado, sabemos, por el apartado 3 del teorema de representación, que la transformada de Gel'fand define un homomorfismo. Además, por el apartado 5 del teorema de representación, se tiene que el núcleo de dicho homomorfismo consiste en la intersección de todos los ideales maximales de $A(\overline{D_1})$, es decir,

$$\bigcap_{z\in\overline{D_1}} M_z = \{f \in A(\overline{D_1}) : f(z) = 0 \text{ para todo } z \in \overline{D_1}\} = \{0_{A(\overline{D_1})}\}.$$

Asimismo, se prueba de manera inmediata, por construcción de $\hat{f}$, que $\|f\| = \|\hat{f}\|$ para todo $f \in A(\overline{D_1})$. En conclusión, la transformada de Gel'fand define un monomorfismo isométrico de $A(\overline{D_1})$ en $C(\mathscr{M}) \cong C(\overline{D_1})$. Por tanto, $A(\overline{D_1}) \cong \widehat{A(\overline{D_1})}$ y, con ello, $A(\overline{D_1})$ se puede interpretar como una subálgebra de $C(\overline{D_1})$.

□

Nota 5.2.5. *Nótese que el espacio de ideales maximales de una subálgebra puede contener estrictamente al espacio de ideales maximales de un álgebra que la contiene. Para verlo, consideremos la aplicación ι de $A(\overline{D_1})$ en $C(\partial\overline{D_1})$ dada por $\iota(f) := f|_{\partial\overline{D_1}}$. Ésta define un monomorfismo isométrico de álgebras de $A(\overline{D_1})$ en $C(\partial\overline{D_1})$ (se prueba, sin mayor dificultad, que $\iota(A(\overline{D_1}))$ es una subálgebra con unidad de $C(\partial\overline{D_1})$ y que dicha aplicación define un homomorfismo de álgebras; la inyectividad se tiene porque si suponemos, dados $f, g \in A(\overline{D_1})$, que $f|_{\partial\overline{D_1}} = g|_{\partial\overline{D_1}}$, entonces se tiene que $(f-g)|_{\partial\overline{D_1}}(z) = 0$ para todo $z \in \partial\overline{D_1}$ y, aplicando el principio del módulo máximo, se sigue que $(f-g)(z) = 0$ para todo $z \in \overline{D_1}$, es decir, que $f = g$; el carácter isométrico se tiene por el principio del módulo máximo). Con ello, $A(\overline{D_1}) \cong \iota(A(\overline{D_1}))$ y, por tanto, podemos interpretar $A(\overline{D_1})$ como una subálgebra de $C(\partial\overline{D_1})$. Asimismo, se tiene que el espacio de ideales maximales de $A(\overline{D_1})$, que es $\overline{D_1}$, contiene estrictamente al espacio de ideales maximales de $C(\partial\overline{D_1})$, que es $\partial\overline{D_1}$.*

Bibliografía

[1] Bak, J. , Newman, D.J. *Complex Analysis*, 3rd.ed. Springer-Verlag, 2010.

[2] Berberian, S. K. *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*. Springer-Verlag, 1973.

[3] Conway, J.B. *A course in Functional Analysis*, 2nd.ed. Springer-Verlag, 1990.

[4] Hungerford, T. *Algebra*. Springer-Verlag, 1980.

[5] Larsen, R. *Banach algebras: An introduction*. Dekker, 1973.

[6] Vera López, A. , Alegría Ezquerra, P. *Un curso de análisis funcional teoría y problemas*. Ed. Antonio Vera López, 1997.

[7] Willard, S. *General Topology*. Dover Publications, 2004.

Apéndice A

Teorema de Hahn Banach

El contenido de este apéndice (véase [2]) es necesario para el desarrollo del ejemplo 3.2.1, del ejemplo 3.2.2 y del teorema 4.4.4.

Definición A.0.1. *Sean E un espacio vectorial y $p : E \to \mathbb{R}$ una aplicación. Decimos que p es una* ***seminorma*** *sobre E si satisface, para cualesquiera $x, x' \in E, \lambda \in \mathbb{C}$, lo siguiente:*

1. $p(x) \geq 0$.
2. $p(x + x') \leq p(x) + p(x')$.
3. $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$.

Ejemplo A.0.1. *Toda norma sobre un espacio vectorial E es a su vez una seminorma p sobre E que queda caracterizada por la propiedad de que $p(x) = 0_{\mathbb{R}}$ si, y solo si, $x = 0_E$.*

Ejemplo A.0.2. *Sea E un espacio vectorial. Un caso trivial de seminorma es el relativo a p con $p(x) = 0_{\mathbb{R}}$ para todo $x \in E$. Además, éste es un claro ejemplo de seminorma que no es norma.*

Ejemplo A.0.3. *Sea E un espacio vectorial. La aplicación $p_y : E \to \mathbb{R}$ definida como*

$$p_y(x) := \begin{cases} |\lambda| & \text{si } x = \lambda y \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C}, \\ 0_{\mathbb{R}} & \text{si } x \neq \lambda y \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

define una seminorma sobre E para todo $y \in E \backslash \{0_E\}$. Veamóslo:
atendiendo a la definición de p, es inmediato que la primera condición se cumple.
Comprobemos ahora que se cumple la segunda condición. Sean $x, x' \in E$. Si suponemos que $x = \lambda y, x' = \lambda' y$, con $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$, entonces se tiene que

$$p_y(x + x') = p_y((\lambda + \lambda')y) = |\lambda + \lambda'| \leq |\lambda| + |\lambda'| = p_y(x) + p_y(x').$$

Si, por el contrario, x o x' no es múltiplo de y, entonces es inmediato que $p_y(x + x') = 0_{\mathbb{R}} \leq p_y(x) + p_y(x')$.
Veamos ahora que se satisface la tercera condición. Sean $\lambda \in \mathbb{C}, x \in E$. Si suponemos que $x = \mu y$, con $\mu \in \mathbb{C}$, entonces se tiene que

$$p_y(\lambda x) = p_y((\lambda\mu)y) = |\lambda\mu| = |\lambda| \cdot |\mu| = |\lambda| p_y(\mu y) = |\lambda| p_y(x).$$

Si, en cambio, x no es múltiplo de y, entonces λx tampoco lo es y se tiene, por tanto, que $p_y(\lambda x) = 0 = |\lambda| p_y(x)$.
Con esto, queda probado que $p_y(x)$ es una seminorma.

Teorema A.0.1. *(Teorema de Hahn-Banach) Sean E un espacio vectorial, M un subespacio vectorial de E y $p : E \to \mathbb{R}$ una seminorma sobre E. Se tiene que, si $g : M \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal sobre M que satisface que $|g(y)| \leq p(y)$ para todo $y \in M$, entonces g se puede extender a un funcional lineal $f : E \to \mathbb{C}$ que cumple que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

Corolario A.0.1. *Sean E un espacio vectorial y $p : E \to \mathbb{C}$ una seminorma sobre E. Se tiene que para todo $a \in E$ existe un funcional lineal $f : E \to \mathbb{C}$ que satisface que $f(a) = p(a)$ y también que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

Teorema A.0.2. *Si E un espacio normado, entonces para todo $a \in E \backslash \{0_E\}$ existe un funcional lineal y continuo $f : E \to \mathbb{C}$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(a) = \|a\|$.*

Glosario de símbolos

$(x_\alpha)_\alpha$, 10

A , 21

A' , 39

A/I , 37

R_x , 32

$U(A)$, 21

$U_{x_1,\ldots,x_k}(g;\epsilon)$, 15

$\hat{x}$, 41

$\leq$, 10

$||u||$, 6

$\mathscr{B}$, 17

$\mathscr{M}$, 39

$\mathscr{X}$, 39

ϕ , 38

π , 37

π_M , 38

π_j , 17

$\rho(x)$, 32

$\sigma(x)$, 32

$|||\cdot|||$, 22

$\widehat{A}$, 41

$A(\overline{D_1})$, 27

$B(x,y)$, 12

$B^y(x)$, 12

$B_x(y)$, 12

$C(X)$, 24

$C_b(X)$, 27

η_M , 38

$\mathscr{L}(E,F)$, 5

$\mathscr{V}(E,F)$, 4

$\sigma(E',E)$, 13

$\sigma(E,E')$, 13

$r(x)$, 35